KÜRESEL TRİGONOMETRİ YARDIMI İLE KÜRE ÜZERİNE V KADAR NOKTA YERLEŞTİRME

H. Hilmi HACISALİHOĞLU*

r- yarıçaplı bir süre üzerine, ardışık olarak, aralarındaki uzaklık (küresel uzaklık) aynı olan V kadar noktaların yerleştirilmesi problemi için çözüm kesin olarak polytop teorisinden bilinmektedir [2].

Biz burada cebirsel yönden cevabı bilinen bu soruyu küresel geometri-küresel trigonometri yönünden çözdükten sonra yeni bir çözüm daha y a k l a ş ı k ç ö z ü m olarak verdik.

$S_k = 4\pi r^2$, r yarıçaplı kürenin alanıdır.

$S_ü = \dfrac{\pi r^2 e}{180}$, küresel eşkener üçgenin alanıdır,

burada

$e = 3A-180$

dir [1].

m: küre yüzeyini örtebilen aynı cinsten kongrüent eşkenar üçgenlerin sayısı ise

$$m = \frac{S_k}{S_ü} \quad \text{veya} \quad m = \frac{240}{A-60}$$

dır. Buradan

$$A = 60 + \frac{240}{m}$$

bulunur.

* Gazi Üniv. Fen - Edebiyat Fakültesi Ankara.

Bir küresel üçgende iç açıların toplamı için bilinen sınırlardan dolayı

$$60 < A < 180$$

veya

$$60 < 60 + \frac{240}{m} < 180$$

veya buradan m için

$$2 < m < \infty$$

bulunur. Eşkener üçgenin iç açılarından biri A ise

A için

(i) $A > 60°$

(ii) $A < 180°$

(iii) $\frac{30}{A}$ = bir tamsayı (Z)

olmalıdır.

Diğer taraftan

V: Küreyi örten üçgenlerin köşe noktalarının sayısı,

E: Küreyi örten üçgenlerin kenarlarının sayısı,

F: Küreyi örten üçgenlerin yüzlerinin sayısı

olmak üzere Euler-Poincare bağıntısına göre

$$V - E + F = 2$$

dir [3].

$$F = m$$

olduğu aşikârdır. Komşu iki üçgenin bir kenarı çakışık olacağından

$$E = \frac{3 \cdot m}{2}$$

dır. Euler-poincare bağıntısından

$$V = \frac{m + 4}{2}$$

dır. Diğer taraftan V bir pozitif tamsayı ve

$$2 < m < \infty$$

olduğundan

$$m = 2k+1, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

için çözüm yoktur.

$$m = 2k, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

için çözüm beklenebilir.

Ayrıca eşkenar üçgenin A iç açıları ile a küresel kenar uzunlukları arasında

$$2 \operatorname{Cos} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{A}{2} = 1$$

dir [1].

Buna göre örneğin

$$m = 4 \text{ için } v = 4 \text{ ve } A = 120^\circ, \; a = 109^\circ \; 28'$$

dır. Örneğin

$$m = 8 \text{ için } V = 6 \text{ ve } A = 90^\circ, \; a = 90^\circ$$

olur.

V nin en büyük değeri nedir?

(iii) den

$$\frac{360}{A} = \text{tamsayı } (Z)$$

dan $Z \geq 6$ olamayacağına göre $Z = 5$ olması halinde $A = 72^\circ$ olan en büyük değeri alır. Bu halde

$$m = 20, \; V = 12 \text{ ve } a = 62^\circ 01'$$

olur.

Y a k l a ş ı m Ç ö z ü m :

$$\varepsilon > 0, \; A = 60^\circ + \varepsilon$$

alalım. $\varepsilon = 1^\circ$ yani $A = 61^\circ$ olsun.

$$m=240,\ V=122 \text{ ve } a=13°50'$$

olur. Bu durumda (iii) sağlanmadığı için çözüm yaklaşıktır.

Tersine, küre üzerine $V=442$ noktayı yerleştirmek istediğimizi düşünelim.

Bu halde

$$\frac{m+4}{2} = 442 \text{ den } m=880,\ A=60°\ 16'$$

$a=10°\ 14'$, $\varepsilon=16'$

olur. ε yerine 16'dan vazgeçip 10' alırsak,

$m=800$ yerine	$m-1440$
$V=442$ yerine	$V=\ 722$
$a=10°14'$yerine	$a=\ 7°\ 54$

elde ederiz.

Şu halde

$A=72$	için	$V=12$
$A=61°$	"	$V=122$
$A=60°16'$	"	$V=442$
$A=60°10'$	"	$V=722$

olduğunu görüyoruz.

Kaynaklar

1– **Kızılırmak, A.**, *Astronomi dersleri*, Cilt 1, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1964. İZMİR.

2– **Coxeter, H.S.M.**, *Regular Polytopes*, Secont Edition, Memillan Comp. London. 1963, pp. 1–57.

3– **Hacısalihoğlu, H.H.**, *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983. Mat. No: 2, Malatya pp: 877.