LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE KARARLILIK

Cevat Kart

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Diferensiyel denklemler hakkında ilk işlem filozof ve matematikçi olan G.W.Leibniz tarafından 11 Kasım 1675 tarihinde kağıt üzerinde

$$\int ydy=\frac{1}{2}y^2$$

eşitliğini yazması ile başlar.Leibniz bu eşitliği yazmakla hem etkili bir araç olan integral işaretini kullanmış hem de basit bir diferensiyel denklemi çözmüştür.

Lineer diferensiyel denklemler hakkında ilk inceleme de L.Euler(1707-1783) tarafından,sabit katsayılı lineer homogen diferensiyel denkleme ilişkin olarak 15 Eylül 1739 tarihinde John Bernoulli(1667-1748) ye yazdığı mektup ile başlar.

Diferensiyel denklemlerin tarihsel gelişiminde iki temel yol izlenmiştir.Bunlardan ilki ve en eskisi,ya çok nadiren kapalı formda ya da kuvvet serileri cinsinden açık çözümleri bulmak için gösterilen çabalardır.İkincisi de denklemlerin tümünü çözme ümidi terkedilerek,bunun yerine çözümlerin genel davranışına ilişkin kalitatif yaklaşım (topolojik yaklaşım ya da geometrik yaklaşım) hakkında inceleme ve araştırmayı yoğunlaştırmak olmuştur.Bu görüş açısı bakımından Lineer denklemler de incelenebilir,ancak Lineer olmayan denklemlerin kalitatif teorisi ise tamamen farklıdır.Bu inceleme yöntemi, gök mekaniği alanındaki çalışmaları ile ilgili olarak 1880 yılları civarında ilk defa H.Poincaré (1854-1912) tarafından kullanılmış ve ozamandan beri hem soyut hem de uygulamalı matematikçiler bakımından artan bir ilgi konusu olmuştur.

Lineer diferensiyel denklemler teorisi geçen 200 yıldan bu yana geniş ve yoğun bir şekilde incelenmiş bulunduğundan oldukça tam ve kapsamlı olarak bilinen bir teori niteliğindedir. Oysa çok daha geniş ve karmaşık olduğu halde, henüz 100 yıldır inceleme durumunda bulunan lineer olmayan diferensiyel denklemler hakkında genel teorinin çok azı bilinmektedir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin üzerinde önemle durulmasının temel nedeni, fiziksel sistem ve onları tanımlayan denklemlerin çoğunun lineer olmayan türden karşımıza çıkıyor olmasıdır. Doğal olarak yapılan lineerleştirmeler, yaklaşıklık ifade eden türetmelerdir ve bu türetmeler kısmen orijinal lineer olmayan problemlerdeki zorluğun bir itirafı ve kısmen de bir somunun yarısının hiç olmamasından daha iyi olmasının gereği olarak pratik bakışın ifadeleridir. Belirtelim ki çok sayıda durum için lineerleştirme geçerli değildir.

A. Einstein, fiziğin temel denklemlerinin lineer olmamasından dolayı, matematik fiziğin tümünün yeniden ele alınması gerektiğini vurgulamıştır. [1].

Önemli bir kaç lineer olmayan diferensiyel denklem aşağıda verilmektedir [2].

1. $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ Liénard denklemi

2. $\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$ van der Pol denklemi (1924)

3. $x+f(x)\dot{x}+g(x)=h(t)$ Solomon Lefschetz denklemi ya da kuvvet terimli Liénard denklemi.

4. $\ddot{x}+\mu f(x)\dot{x}+g(x)=\mu h(t)$ Mary Cartwright-J.E.Littlewood denklemi.

5. $\ddot{x}+g(x)=p(t)$, $p(t)$ çift. G.R.Morris denklemi.

6. $\ddot{x}+g(x)=e(t)$ G.Seifert ve Z.Opial denklemi ya da S.Lefschetz denkleminin özel durumu.

7. $\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=e(t)$ — Rayleigh denklemi.

8. $\ddot{x}+f(\dot{x})+x=0$ — Malgarini denklemi

9. $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=h(t)$ — Levinson denklemi ya da Antosiewicz denklemi(1955)

10. $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x,\dot{x})=0$ — Z. Mikolajska denklemi

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x(a-by) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-y(c-dx) \end{cases}$ — V.Volterra denklem sistemi

(a,b,c,d pozitif sabitler)

Belli bir olayın ifadesi olarak ortaya çıkan bu denklemlerin her biri ayrı bir inceleme konusudur.Tabiat olayları son derece kapsamlı ve karmaşık olduğundan karşımıza çıkabilecek ve henüz teorisinin çok azının bilindiği lineer olmayan denklemleri incelemek son derece büyük zorluk arzetmektedir.Aşağıdaki açıklama bu zorluğun kısmen bir ifadesidir: Örneğin yukarıda 2 ile belirtilen denklemde 1 ile belirtilen denkleme göre f(x) ve g(x) yerine özel fonksiyonlar geldiği halde,lineer denklemlerde olmayan ancak burada yeni bir durum karşımıza çıkmakta ve denklemler ayrı ayrı isim almaktadır.

Tabiat olaylarının daha iyi incelenebilmesi,büyük çapta lineer olmayan diferensiyel denklem teorisinin daha çok gelişmesine bağlı gözükmektedir.Nitekim 4 Kasım 1957 yılında Sovyetler Birliği tarafından Sputnik I dünya yörüngesine yerleşen ilk uydu olduğunda Amerika Birleşik Devletleri'nde panik olmuş ve yoğun bilimsel toplantıları birbirini izlemiştir. 1960 lı yıllarda Paris'te yapılan bir bilimsel toplantıda büyük matematikçilerden Solomon Lefschetz Sovyetler Birliği'nin daha önce uzaya gidebilmesini,daha önce lineer olmayan denklemleri çözmüş olmasına bağlamıştır.*

---

* Özel Kaynak.Değerli bilim adamı matematik fizikçi Prof.Dr. Ferit ÖKTEM,ODTÜ, Ankara

n yıncı basamaktan bir diferensiyel denklemi, n tane birinci basamaktan bir sisteme indirgemenin çeşitli avantajları vardır.Yüksek basamaktan diferensiyel denklemler, sistemlere eşdeğer ise de, her sistem yüksek basamaktan bir denkleme eşdeğer değildir. Örneğin,

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1),\quad \frac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_2),\quad \frac{dx_3}{dt}=f_3(t,x_3)$$

gibi.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

şeklinde iki boyutlu sistemi gözönüne alalım. İkinci basamaktan

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) \qquad (2)$$

şeklindeki bir diferensiyel denklem de daima

$$x=x,\quad y=\frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

konumu ile (1) sistemine benzer

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=f(x,y) \end{cases} \qquad (4)$$

şeklinde bir sisteme indirgenebilir.

(1) Sisteminin

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \qquad (5)$$

şeklinde çözümünü bulmak çoğunlukla zordur. Bunun yerine daha kolayı denklem sistemi arasından t yi yok ederek gitmektir. Böylece

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{6}$$

şeklinde skaler diferensiyel denkleme varılır. (6) denkleminin çözümleri (1) sisteminin <u>yolları</u> ya da <u>yörüngelerini</u> verir.

Örneğin,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x(a-by) \\ \frac{dy}{dt}=-y(c-dx) \end{cases} \tag{7}$$

şeklinde V. Volterra (1860-1940) sistemini göz önüne alalım. Bu sistem elemanter fonksiyonlar cinsinden $x=x(t)$, $y=y(t)$ şeklinde çözülemez. Ancak sistemin,

$$y^{a}\, e^{-by}=Kx^{-c}\, e^{dx}$$

şeklinde yörüngeleri bulunabilir. Bu denklem de x ve y için çözülemez, ancak kapalı bir eğri olduğu gösterilebilir.

Bir yol ya da yörünge, $x=x(t)$, $y=y(t)$ şeklinde bir integral eğrisinin faz düzlemi $\left(x,\ y=\frac{dx}{dt}\text{ düzlemi}\right)$ üzerindeki izdüşümüdür. Başka bir anlatım ile yörünge, birden fazla çözüm ile parametrik olarak gösterilebilen faz düzleminin bir D bölgesindeki bir eğridir. Yani $x(t)$, $y(t)$ ve $x(t+c)$, $y(t+c)$, $c\neq 0$ çiftleri farklı çözümler gösterdiği halde, bu çiftler parametrik olarak aynı eğriyi gösterirler. Bu durum, (1) sisteminde ikinci yanların açık olarak t ye bağlı olmadığı <u>otonom sistemler</u> için geçerlidir.

Örneğin, α, 0 ile 2π arasında değişirken

$$x(t)=\sin(t+\alpha), \quad y(t)=\cos(t+\alpha)$$

fonksiyonlar çifti,

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x$$

sisteminin sonsuz sayıda farklı çözümünü gösterdiği halde, bu fonksiyonlar çifti aynı bir C: $x^2+y^2=1$ yörüngesini gösterir. Yörünge sadece bir eğri değil, aynı zamanda t nin artış yönünü gösteren yönlü bir eğridir.

(6) denkleminin çözümü, her ne kadar (1) sisteminin yolları ise de (6) nın integral eğrilerine ilişikin bir yön söz konusu değildir. (6) denklemi, (1) sisteminin (x,y) noktasından geçen yoluna çizilen teğetin eğimini verir. (x,y) noktasında P ve Q fonksiyonlarının her ikisinin sıfır olmaması gerekir.

P ve Q yu aynı anda sıfır yapan bir (x_0,y_0) noktası sistemin kritik noktaları adını alır. $x=x_0$, $y=y_0$ aynı zamanda sistemin sabit çözümleridir. Bu sabit çözüm bir yol tanımlamaz ve bu yüzden hiç bir yol bir kritik noktadan geçmez. Bu yüzden yönlü eğriler gösteren (1) sisteminin yolları, (6) nın bir parametreli integral eğrileri ile çakışır.

Kritik nokta yerine denge noktası ya da denge değeri terimleri de kullanılır. Kuşkusuz bir fiziksel sistemin denge durumları, onun en önemli özellikleri arasındadır ve onunla ilgilenilmesini gerektirmektedir.

Bir fiziksel sisteme karşılık gelen hareketin en belirgin özellikleri şu şekilde sıralanabilir:

(i) Kritik noktalar

(ii) Kritik noktalara yakın yolların düzeni

(iii) Kritik noktaların kararlılık ve kararsızlığı

(iv) Periyodik çözümlere karşılık gelen kapalı yollar

Bu özellikler, (1) sisteminin tüm yollarının şekli olan faz diyagramı ya da faz portresi esas kısmını oluşturur.

Lineer olmayan denklem ve sistemler genel olarak açık bir şekilde çözülemediğinden, kalitatif teorinin amacı, faz diyagramı hakkında doğrudan P ve Q fonksiyonlarından mümkün olduğu kadar çok bilgi ortaya çıkarmaktır. x=x(t) diyelim, (2) denkleminin bir periyodik çözümü ise, bu durumda onun :

$y(t)=\frac{dx}{dt}$ türevi de periyodik ve bu yüzden (4) sisteminin buna karşılık gelen yolu kapalıdır.

Tersine olarak, (4) ün herhangi bir yolu kapalı ise, bu durumda (2) bir periyodik çözüme sahiptir. Bu düşüncenin uygulamasının somut bir örneği olarak, Van der Pol denkleminin çözülememesine rağmen, eşdeğer otonom sisteminin bir tek kapalı yola sahip olduğunu göstermekle onun periyodik çözüme sahip olduğu gösterilebilir [1], [3], [4], [5].

Şimdi çözümlerin kararlılık kavramına dönelim [1], [2], [3], [4], [6]. Kararlılık kavramı, başlangıç koşullarını tam olarak ölçme imkânı olmadığından tüm fiziksel uygulamalarda çok büyük öneme sahiptir. Örneğin, 1 slug* kütleli bir parçacık sabit 1 lb/ft lık kuvvete sahip bir elastik yaya asılmakta ve sürtünmesiz bir ortamda hareket etmektedir. Ayrıca parçacığa F(t)=cos2t lb.luk bir dış kuvvet etki etmektedir. y(t) parçacığın yerini göstersin. Buna göre

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\cos 2t \qquad (8)$$

diferensiyel denklemine varılır.

---

* Slug: F.P.S. sisteminde bir kütle birimi (32.174.lbs.=14.5 Kg.)

$x_1=y$, $x_2=\frac{dy}{dt}$ konumu ile

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1+\cos 2t \end{cases} \tag{9}$$

sistemine varılır.

(8) skaler denklemine ilişkin homogen denklemin bağımsız çözümleri $y_1(t)=\sin t$, $y_2(t)=\cos t$ ve homogen olmayan denklemin bir özel çözümü de $y=-1/3 \cos 2t$ olduğuna göre (9) sisteminin

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

biçimindeki her çözümü

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cos 2t \\ \frac{2}{3}\sin 2t \end{pmatrix} \tag{10}$$

şeklinde yazılabilir.

t=0 zamanında yer ve hızı ölçülerek $y(0)=1$, $y'(0)=0$ elde ediliyor. Buna göre $c_1=0$, $c_2=\frac{4}{3}$ elde edilir. Buradan zamana bağlı olarak parçacığın yer ve hızı

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t \\ -\frac{4}{3}\sin t+\frac{2}{3}\sin 2t \end{pmatrix} \tag{11}$$

şeklindedir.

Bir gerçel sistem etkileşimlere tabidir ve o sistemin başlangıç durumunu tam olarak kontrol etmek mümkün değildir. Buna göre ölçülerimizde 10^{-4} büyüklüğünde bir hata yaptığımızı varsayalım. Bu durumda parçacığın yer ve hızı (11) ile belirtilen değerlere yakın kalır mı, yoksa kalmaz mı sorusuna cevap arayalım.Bu sorunun cevabı olumludur,aksi halde Newton mekaniğinin pratik bir anlamı olmaz.Gerçekten,bu durumda parçacığın yer ve hızının (11) ile belirtilen değerlere son derece yakın kaldığı kolaylıkla gösterilebilir.

Koşullar uygulanmadan önceki $y(t)$ ve $y'(t)$ değerleri $Y(t)$ ve $Y'(t)$ ile gösterilirse,

$$y(t) = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$$

$$Y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$$

ve

$$y'(t) = -\frac{4}{3}\sin t + \frac{2}{3}\sin 2t$$

$$Y'(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t + \frac{2}{3}\sin 2t$$

dır.Buradan

$$\begin{aligned} y(t)-Y(t) &= \left(\frac{4}{3} - C_2\right)\cos t - C_2 \sin t \\ y'(t)-Y'(t) &= -C_1 \cos t - \left(\frac{4}{3} - C_2\right)\sin t \end{aligned} \qquad (12)$$

olduğuna göre C_1 ve C_2 sabitleri

$$-10^{-4} \leq C_1 \leq 10^{-4}$$

$$-10^{-4} \leq \frac{4}{3} - C_2 \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{4}{3} - 10^{-4} \leq C_2 \leq \frac{4}{3} + 10^{-4}$$

eşitsizliklerini sağlamaktadır.

(12) eşitlikleri yeniden

$$y(t)-Y(t)=\sqrt{C_1^2+(\frac{4}{3}-C_2)^2}\cos(t-\delta_1), \quad \tan\delta_1=\frac{C_1}{C_2-\frac{4}{3}}$$

$$y'(t)-Y'(t)=\sqrt{C_1^2+(\frac{4}{3}-C_2)^2}\cos(t-\delta_2), \quad \tan\delta_2=\frac{\frac{4}{3}-C_2}{C_1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüldüğü üzere hem $y(t)-Y(t)$ hem de $y'(t)-Y'(t)$ mutlak değer olarak

$$\sqrt{C_1^2+(\frac{4}{3}-C_2)^2} \qquad (13)$$

ile sınırlıdır. Ohalde

$$\sqrt{C_1^2+(\frac{4}{3}-C_2)^2} \leq \sqrt{10^{-8}+10^{-8}} = \sqrt{2.10^{-8}} = \sqrt{2}.10^{-4}$$

nedeniyle (13) niceliği en fazla $\sqrt{2}.10^{-4}$ dür. Bu yüzden $y(t)$ ve $y'(t)$ nin değerleri gerçekten (11) ile belirtilen değerlere yakın olduğu sonucuna varılır. Başka bir anlatım ile, kararlı bir çözümde, çözümü ortaya koyan verilerde yapılan küçük değişiklikler çözümde de küçük değişiklikler ortaya koyar. Uygulama bakımından kararlı olmayan bir çözümün hiçbir değeri yoktur. Çünkü bu durumda deneysel verilerde tam bir kesinlik yok demektir.

İkinci bir örnek olarak, g yerçekimi ivmesi ve a sarkacın uzunluğu olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}\sin x=0 \qquad (14)$$

şeklinde basit sarkaç denklemini gözönüne alalım.

$$x_1=x \quad \text{ve} \quad x_2=\frac{dx_1}{dt} \quad \text{konumu ile}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{g}{a}\sin x_1 \end{cases} \qquad (15)$$

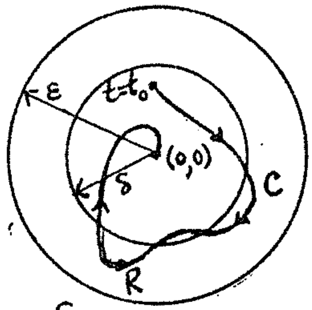
sistemine varılır.(15) denklem sistemi $(n\pi,0),(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ kritik noktalarına sahiptir.(0,0) ve $(\pi,0)$ noktalarının durumunu inceleyelim.$(\pi,0)$ kritik noktası, sarkacın sıfır hızlı sağ üst pozisyonda bulunması demektir.Bir sistemin kritik noktaları,aynı zamanda sistemin denge çözümleridir.Bu iki denge çözümü tamamen farklı özelliklere sahiptir.

Sarkaç ,(0,0)kritik noktasında ya çok az yer değiştirmek ya da çok küçük bir hız vermekle değişikliğe uğrar ise, bu durumda sarkaç $x_1=0$ cıvarında küçük salınımlar ortaya koyar. Diğer yandan,sarkaç $(\pi,0)$ kritik noktasında çok az değişikliğe uğrar ise, bu durumda sarkaç $x_1=0$ civarında ya çok büyük salınımlar ortaya koyar ya da nihayetsiz bir şekilde dönmeye devam eder.Böylece $(\pi,0)$ civarında çok küçük bir etki , sarkaçın hareketinde çok büyük bir sapmaya neden olur.Ohalde (15) sisteminin (0,0) kritik noktası kararlı,$(\pi,0)$ noktası kararsızdır.

Bu sezgisel düşünceleri daha tam bir şekilde formüle etmeden önce bir noktayı aydınlatmada yarar vardır.

Dötrt temel kritik nokta vardır.Bunlar düğüm noktaları, semer noktaları,merkez ve sarmal nokta olarak ifade edilebilir. Her bir durumda kritik noktanın $0=(o,o)$ olduğu varsayılabilir. Gerçekten (1)sisteminin $(x_o,y_o)\neq(o,o)$ kritik noktası (o,o) kritik noktasına indirgenebileceği gibi (1) sisteminin $x=x_1(t)$, $y=y_1(t)$çözümü de(o,o)kritik noktasına indirgenebilir.

Böylece (1) sisteminin (o,o) kritik noktasının(ayrık) kararlılık kavramı ele alınabilir.



Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık aşağıdaki koşullar geçerli olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise, bu durumda (o,o) kritik noktası kararlıdır denir:

(a) Herhangi bir, $t=t_0$ değerine karşılık (o,o) ın δ komşuluğunda bulunan (1) ın her yolu $t_0 \leq t < \infty$ için tanımlıdır.

(b) Bir yol (a) koşulunu sağlıyor ise, o yol $t_0 \leq t < \infty$ için (o,o) ın ε komşuluğunda kalır.

Başka bir anlatım ile, (o,o) noktası kararlı ise, bu durumda t=to da δ yarıçaplı $x^2+y^2=\delta^2$ çemberi içerisinde bulunan her bir C: x= x(t), y(t) yolu, her $t \geqslant to$ için ε yarıçaplı $x^2+y^2=\varepsilon^2$ çemberi içerisinde kalır.

Bir başka deyişle t=to da C yolu üzerindeki R noktası arasındaki uzaklık δ dan küçük kalmak üzere $t \geqslant to$ için (o,o) ile C yolu üzerindeki R noktası arasındaki uzaklık ε dan küçük kalıyor ise, (o,o) noktası kararlıdır. Kararlılık tanımı kabaca diyorki, bir kez bir yörünge (o,o) ı kapsayan küçük bir disk içerisine girer ise, o yörünge gelecek her zaman için biraz daha büyük bir disk içerisinde kalır.

(a) ve (b) koşullarını sağlayan her C yolu için ayrıca,

(c) $$\lim_{t\to\infty} x(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t)=0$$

geçerli ise (o,o)kritik noktası asimtotik kararlıdır denir. Kritik nokta kararlı değil ise, kararsızdır denir.

Yukarıdaki tanım bazan sağda kararlılık olarak adlandırılır. Benzer tanım $t \to -\infty$ a giderken solda kararlılık için verilebilir.Bir kritik nokta kararlı ve asimtotik kararlı ise , tam kararlı (strictly stable) dır. denir.Bir kritik nokta kararlı ancak asimtotik kararlı değil ise, yansız kararlı (neutrally stable) adını alır.

Kararlılık,kararsızlık ve asimtotik kararlılık tanımları 1892 yılları civarında Liapunov tarafından verilmiştir.Bir Rus matematikçisi ve makine mühendisi olan Alexander Mikhailovich Liapunov (1857-1918), 1892 yılında yaptığı bir çalışma [7] ile bu alanda büyük bir çığır açmış ve O'nun yaptığı bu çalışma halen günümüzde diferensiyel denklemcilerin kesinlikle önemli bir okulu olarak addedilen Sovyet Okulu'nun incili sayılmaktadır [8].

KAYNAKLAR

[1] G.F.Simmons, Differential Equations With Applications and Historical Notes,McGraw-Hill Book Co.,New York 1972.

[2]G.Sansone and R.Conti,Nonlinear Differential Equations, Macmillian,New York, 1964

[3]L.Cesari,Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations,Springer-Verlag, New York,1971

[4]J.K.Hale,Ordinary Differential Equations,Wiley-Interscience, New York,1969

[5]D.W.Jordan and P.Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations,Clarendon Press,Oxford,London, 1985

[6]M.Brown,Differential Equations and Their Applications, Springer-Verlag, New York, 1983

[7]A.M.Liapunov,Probléme Géneral de La Stabilité du Mouvement, Annals,Math. Studies,NO.17,Princeton University Press, 1949

[8]J.Lasalle and S.Lefschetz,Stability by Liapunov's Direct Methods With Applications,Academic Press, 1967