

RELATIVİSTİK EVREN MODELLERİ

Prof.Dr. İlhami Yavuz

E.Ü. Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay
Bilimleri Bölümü

Fiziksel olaylar günümüzde dört çeşit etkileşme ile açıklanmaya çalışılmaktadır. Bunlar

- i) Zayıf etkileşmeler $\approx 10^{-19}$ cm menzilli olup çekirdek ve çekirdek
ii) Kuvvetli etkileşmeler altı bölgelerde etkin olan etkileşmelerdir.

- iii) Elektromagnetik etkileşmeler

menzilli olup molekül ve molekül üstü yapıda etkin rol oynarlar çekici ve itici olabilirler.

- iv) Gravitasyonel etkileşmeler

menzilli olup
a) çok büyük yapıda
b) çok çok küçük yapıda ($\approx 10^{-38}$ Planck uzunluğu mertebesi) rol oynarlar. Çekici tiptedirler.

Kozmoloji evrenin büyük boyuttaki yapı ve işleyişini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu incelemede genellikle kozmolojik modeller kullanılır. Kozmolojik modeller bazı fiziksel prensiplere dayanan matematiksel yapılardır. Bu matematiksel yapıların teorik sonuçları büyük boyuttaki gözlemsel sonuçlarla karşılaştırılarak evrenin yapısını en iyi yansıtan model tespit edilmeye çalışılır. Modeller dayandıkları temel fizik prensiplerine göre isimlendirirler.

Daha önce de belirtildiği gibi Kozmoloji evrenin büyük boyuttaki yapı ve işleyişini inceleyen bir bilim dalı ve bu boyutlarda dominant olan etkileşmeler de gravitasyonel etkileşmeler olduklarına göre, Kozmolojik modellerin temelini oluşturan fiziksel prensiplerin gravitasyonel etkileşmeleri açıklamaya çalışan fizik kanunları olmaları gerekir. Bu nedenle biz

Önce gravitasyonel etkileşmeleri açıklamaya çalışan fiziksel teorileri kısaca özetleyip bunlara dayanan kozmolojik modellerden sadece önemli olan bir alt grubu, Relativistik evren modellerini, ele alacağız.

1. Newtonsal Gravitasyonel Etkileşmeler (Newton Gravitasyon Teorisi)

Bu teoride uzay ve zaman bağımsız nicelikler olup

1. Uzay üç boyutlu Mutlak Has Öklidiel Uzay (düz uzay) dir ve metriği (iki nokta arasındaki uzaklık) - Kartezyen koordinatlarda $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ifadesini haizdir.

2. Zaman da mutlakdır (zaman intervalleri uzayın her yerinde aynı, uzaydan bağımsız).

3. Böyle bir uzayda oluşan gravitasyonel etkileşme sonsuz hızla - ani olarak- yayılmaktadır ve bir çekim etkileşmesidir.

4. Bu teoride Galile Relativite prensibi denilen bir prensip geçerlidir. Bu prensibe göre fizik kanunları bütün eylemsiz sistemlerde aynı şekilde geçerlidir.

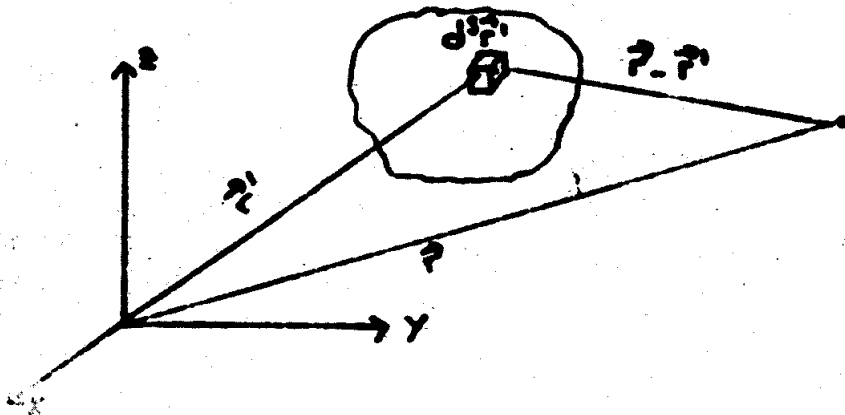
Eylemsiz sistem: İçlerinde üzerine kuvvet etki etmeyen bir cismin durduğu veya sabit hızla hareket ettiği sistemdir.

5. Fizik kanunlarını ifade eden denklemler, Galileo dönüşümleri olarak adlandırılan

$$t' = t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t, \quad \vec{v} = \text{sabit}$$

dönüşümleri altında invariant kalırlar. Bu nedenle bu kabullere dayanan fiziksel teoriye Galileo Invariant Teori de denir.



Bu çekim kuvvet alanı ile bunu doğuran $\Phi(\vec{r}, t)$ skaler potansiyeli (alanı) arasında

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -m \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t)$$

bağıntısı vardır ve $\Phi(\vec{r}, t)$

$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) = 0$, Laplace Denklemi, (kütle dağılımının dışında)

$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$, Poisson Denklemi, (kütle dağılımının içinde)

ifadeleri ile verilirler. Bu denklemlerin tek anlamlı kesin çözümleri ancak sınır koşulları verildiğinde belirlenebilirler. Örneğin sınırlı kütle dağılımları için $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, $\Phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0$ koşullarında çözüm

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \text{ dir.}$$

Yukardaki ifadeler öteden beri bilinen Newton Kanunlarının ifadeleridirler.

Bu teoriyi fiziksel temel alan Kozmolojik Modellere Newtonsal Kozmolojik Modeller denir.

Bu teoriye göre hesaplanan klasik gravitasyonal etkileşme değerleri (gezegenlerin en beri noktalarının ilerlemesi, ışığın gravitasyonal alanlarda sapması ve gravitasyonal kökenli kırmızıya kayma gibi) gözlenen değerlerle uyusmamaktadır. Bu nedenle gravitasyonal etkileşmeleri izah için Newtonsal teoriyi düzeltme girişimleri olmuştur; Örneğin,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^n} e^{-(\vec{r} - \vec{r}')} ; n = 2.00000016$$

veya

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left(1 - \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) e^{-(\vec{r} - \vec{r}')} ; n = 3, 4, \dots \text{vb.}$$

Bu ve bunun gibi daha başka girişimlerde arzulanan sonuçları veremediğinden, gravitasyonel etkileşmeler için yeni teoriler aranması daima gündemde kalmıştır (Zaten Newton Gravitasyon Teorisi kesin bir teori değildir. Zira ilerde de vurgulanacağı gibi hiçbir etkileşme sonsuz hızla yayılamaz). Bu girişimlerden biride onu özel relativite teorisi çerçevesinde incelemek olmuştur.

II. Özel Relativite Teorisi Çerçevesinde Gravitasyonel Etkileşmeler

1. Bu teoride uzay ve zaman birbirinden bağımsız nicelikler değildirler. Olaylar Minkowski uzayı olarakta adlandırılan ve boyutlarından biri zamansal diğer üçüde uzaysal olan dört boyutlu pseudo öklidel bir uzayda oluşurlar. Bu uzayın metriğide -kartezyen koordinatlarda-

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
 veya

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$
ifadesiyle verilir.
2. Zaman mutlak değildir. Yani uzayın değişik bölgelerindeki zaman intervalleri birbirinden farklıdır. Bu durum etkileşme hızının sonlu alınmasından ileri gelir.
3. Böyle bir uzaydaki etkileşme hızı sonludur, yani etki ani yayılmaz. Tabiatta mümkün olan en büyük etkileşme hızı $c=299792.5$ km/s ile ışık hızıdır (Michelson-Morley deneyi).
4. Einstein Relativite prensipi denilen bir prensip geçerlidir. Buna göre fizik kanunları etkileşme hızının sonlu oluşu yanında bütün eylemsiz sistemlerde aynı şekilde geçerlidirler.
5. Bunun matematiksel ifadesi, fizik kanunlarını ifade eden denklemlerin Lorentz Dönüşümleri olarak adlandırılan

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} \left\{ \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

dönüşümleri altında invariant kalmalarıdır.

6. Özel Relativite teorisi $c \rightarrow \infty$ limitinde Newtonsal Teoriye dönüşür.

Fizik kanunlarının bu temel prensiplere uygun olarak formüle edilmesi Özel Relativite Teorisi olarak ta adlandırılır. Bu teoriye Lorentz Invariant teori de denir.

Fiziksel temelleri yukarıda sıralanan bu teori çerçevesinde gravitasyonel etkileşmeler incelenirken iki önemli noktaya dikkat etmek gerekecektir: Bunlar ,

- a) Yeni teori Newtonsal teoride (Klasik Teori) tam olarak verilemeyen gezegenlerin perihel ilerle-

melerine ve diğer etkilere doğal ve kesin bir izah getirmeli

b) Yeni teori Newtonsal teoriyi bir ilk yaklaşım olarak içermeli

Birçok bilim adamı yukarıdaki koşullara uyan ve Lorentz invariant olan birçok gravitasyon teorisi ortaya koymuşlardır. Bu Teorileri başlıca iki grupta toplamak mümkündür.

A) Poincare Tipi Teoriler : Bu teoriler Newton Kanununu Lorentz invariant hale getirerek Klasik Gravitasyon Teorisini Özel Relativite Teorisi içine sokmağa çalışan teorilerdir.

B) Lorentz Invaryanslı Alan Teorileri :Bu teoriler gravitasyon potansiyellerini veren Poisson Denklemini bir ilk yaklaşım olarak veren daha genel teorilerdir ve üç grupta toplanır:

$$\square^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad \text{ve } \chi \text{ Kupplaj sabiti olmak üzere}$$

Skaler Teoriler: $\square^2 \phi = -\chi T$

Vektörel Teoriler: $\square^2 \vec{\phi} = -\chi T_p$

Tensörel Teoriler: $\square^2 \phi_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}$

Burada T , T_p , $T_{\mu\nu}$ kaynak fonksiyonlarıdır ve $\square = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$, D'Alembert Operatörüdür. Denklemlerin $c \rightarrow \infty$ limitinde Poisson ve Laplace denklemlerine dönüştükleride aşikardır.

Maalesef bu teorilerin de tümü üç temel gravitasyonel etkileşmenin bazılarını veya tümünü ancak kısmen doğrulayabilmekte ve ikinci mertebeden gravitasyonel etkileşmeleri ise hiç izah edememektedirler.

Bu teoriyi fiziksel temel alan Kozmolojik Modellerde Özel Relativistik modeller olarak adlandırılmaktadırlar.

III. Genel Relativite Teorisi

Bu teorinin bizzat kendisi bir gravitasyonel etkileşme teorisidir.

Gerek Newtonsal kökenli ve gerekse özel relativistik kökenli gravitasyonel teorilerin gözlenen gravitasyonel etkileşmeleri kesin ve tam olarak verememeleri üzerine, bilim adamları bu teori-

lerin temel prensiplerinde düzeltmeler yapılması gerektiğini vurgulamışlardır. Birçok denemeler sonunda Einstein' nin Genel Relativite Teorisi doğmuştur. Bu teorinin iki temel prensibi vardır. Bunlar

a) Genel Kovaryans İlkesi:

Einstein eylemsiz sistemlerin fiziksel olayların izahında kullanılmasının önemli bir kısıtlama olduğunu vurgulamıştır. Örneğin ivmeli sistemlerde incelenen bazı mekanik olaylar da, sırf ivmeli sistemde incelenmelerinden dolayı ortaya ilave kuvvetler çıkmaktadır (Coriolus, merkezci kuvvetler gibi). Halbuki gerçek fiziksel olaylar, içinde incelendikleri koordinat sistemlerinden bağımsız olmak zorundadırlar. Bu nedenle fiziksel olayları açıklayan denklemler sadece eylemsiz sistemlerde değil keyfi bir sistemde de aynı şekilde (kovaryant) geçerli olmalıdırlar. Bunun matematiksel ifadesi, fizik kanunlarını ifade eden matematiksel denklemlerin, birinden diğerine Jakobiyeni sıfırdan farklı ve sürekli türevlenebilen

$$X'_\mu = X'_\nu (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

şeklindeki genel koordinat değişimleriyle geçilen referans sistemlerinde aynı yapıda kalmaları (kovaryant kalmaları) anlamına gelir. Bu prensibe Genel Kovaryans İlkesi denir.

b) Eşdeğerlilik İlkesi: Bu ilke eylemsizlik kuvvetleriyle gravitasyonel kuvvetler bazı durumlarda eşdeğerdirler şeklinde özetlenebilir. Örneğin bazı sınırlı uzay bölgelerinde, sabit ivmeli bir sistem, ivmesiz sistemdeki homojen sabit gravitasyon alanına ve yine değişken ivmeli bir sistem de ivmesiz sistemdeki homojen değişken gravitasyon alanlarına denktirler. Sınırlı bölgedeki bu eşdeğerliliğe bazen zayıf eşdeğerlilik ilkesi de denir.

Büyük uzay bölgeleri bahis konusu olduğunda veya homojen olmayan ve karmaşık gravitasyon alanlarının varlığı durumunda (alanlar, çok küçük uzay bölgeleri bahis konusu olduğunda homojen kabul edilebilir), bu gravitasyon alanına karşılık gelecek referans sistemleri bulmak güçtür hatta imkansızdır. Bu durumda zayıf eşdeğerlilik ilkesi geçerliliğini yitirir. Einstein bu gibi durumlarda Fiziksel uzayın artık düz uzay olmayıp, eğrilikli

bir uzay olacağını ve bu eğriliği de mevcut kütlelerin doğuracağını ileri sürmüş ve bu iddiasını matematik temellere oturtabilmiştir. Einstein'e göre Minkowski uzayı ancak limit halde bir yaklaşımdır. Matematikten bilindiği üzere bu türlü eğrilikli uzaylar iki noktası arasındaki uzaklığın (yay elemanının)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^{\rho}) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3 \text{ üzerinden toplam alınacak})$$

ifadesi ile verildiği Riemann Uzaylarıdır. Burada $g_{\mu\nu}(x^{\rho})$, bileşenleri koordinatların fonksiyonu olan ve

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \text{ (simetrik)}$$

şartını sağlayan ikinci mertebeden bir tensördür. Bu tensöre Riemann uzayının metrik tensörü denir. Einstein'a göre fiziksel uzay bir Riemann uzayıdır.

Einstein bu iki temel ilkedен hareketle gravitasyonel etkileşmeleri açıklayan ve genellikle kendi adıyla anılan

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{dış alan denklemleri})$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{iç alan denklemleri})$$

denklemlerini bulmuştur. Burada

Λ = Kozmolojik sabit

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad \text{Einstein çekim sabiti, } G = \text{evrensel çekim sabiti}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \partial_{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\tau}\Gamma_{\tau\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\tau}\Gamma_{\tau\mu}^{\lambda}$$

Ricci Tensörü, ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$)

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) = 1. \text{ Tip Christoffel Sembolleri}$$

$$R = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu} = \text{uzayın eğrilik skaleri}$$

$T_{\mu\nu}$ = Kütle enerji dağılımını veren Enerji Momentum Tensörü ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) dürler. Alan denklemlerinin sol yanları uzayın metrik özelliklerini karakterize eden $g_{\mu\nu}(x^{\rho})$ metrik tensör bileşenlerinin fonksiyonlarıdır. Buna göre sol yanlar uzayın geometrisiyle ilgilidir. Sağ yanlar ise

• uzayın enerji ve momentum (kütle) dağılımını belirleyen tensörlerdir. Böylece Einstein $T_{\mu\nu}$ enerji momentum dağılımının uzayın geometrisini belirleyeceğini vurgulamış ve eşdeğerlik ilkesinin matematik ifadesini vermiştir.

$T_{\mu\nu} \neq 0$, $T_{\mu\nu}$ dağılım içindeki iç çözüm 'dür.

$T_{\mu\nu} = 0$, $T_{\mu\nu}$ dağılım dışındaki dış çözüm'dür.

Einstein Alan Denklemleri 10 adet cebirsel bağımsız lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler sistemidir. Ancak bunlar

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda)$ olmak üzere

$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ şartların sağladıklarından (dört tane divergenz şartı) fonksiyonel olarak tam bağımsız

10 değil 6 denklem vardır. Bu 6 denklemden 10 adet $g_{\mu\nu}(x^{\mu})$ potansiyellerinin bulunması bahis konusudur. Bu keyfiliğe uygun koordinat sistemleri ve koordinat şartları kullanılarak ortadan kaldırılabilir.

Einstein alan denklemleri 3 temel gravitasyonel etkileşmelerle birlikte (perihelilerlemesi, ışık sapması ve kırmızıya kayma) ikinci mertebeden gravitasyonel etkileşmeleri (Shapiro efekt, $G^{\mu\nu}$ nin secular değişimi, yörüngenin gravitasyonel radyasyonla frenlenmesi, geodezik presesyon, Lenz - Tiring- efekt) en kesin ve en sade biçimde veren tek denklem sistemidir.

Bazen çeşitli şekillerde değiştirilip yeni birşey keşfedilmiş gibi gösterilmesine rağmen temelde hiç değiştirilemeyen, aşağı yukarı 75 yıldan beri geçerliliğini koruyan ve tek bir insan beyninin yarattığı en güzel ve güçlü teoridir.

İşte bu denklemlerin her bir çözümüne bir relativistik evren modeli diyoruz. Bu çözümler çeşitli simetri kabulleriyle oldukça basitleşirler:

A Geometri simetrileri

1. Uzayda homogenlik ve izotropi varsa oluşturulan evren modelleri uniform evren modelleridir.

i. Küresel simetrik uzay (r, θ, ϕ) küresel koordinatlar olmak üzere

$$ds^2 = g_{tt}(r, t)dt^2 + 2g_{rt}(r, t)drdt + g_{rr}(r, t)dr^2 + f(r)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]$$

ii. Küresel simetrik uzay ve zaman

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\}$$

2. İzotropi yoksa rotasyon yapan modeller
(en tanınmış Kerr (dış) ve Van Stockum (iç))

B Enerji momentum simetrileri

1. $T_{\mu\nu} = c^2 U_\mu U_\nu$, $U^\mu = 4$ -lü hız
toz modelleri (inkohorent madde)
2. $T_{\mu\nu} = c^2 U_\mu U_\nu + \theta_{\mu\nu}$ akışkan modelleri
 θ : gerilim tensörü
3. $T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}$, ideal akışkan
modelleri , p : basınç
4. $T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_\mu U_\nu + \theta_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}$ genel
modeller
 $\theta_{\mu\nu}$: basınç ve gerilim tensörü
 $M_{\mu\nu}$: elektromagnetik enerji tensörü
 $F_{\mu\nu}$: elektromagnetik alan madde etkisi
 $Q_{\mu\nu}$: Termodinamik etkiler

