YARI-GÖRECELİ YARI-SOYSUZ ELEKTRON GAZI İÇİN BASINCIN HESAPLANMASI

Mutlu YILDIZ
ODTÜ Fizik Bölümü

I. GİRİŞ

Yıldızlarda Hidrostatik denge denklemini çözmemiz için durum denklemi'ne (DUD) gereksinimimiz vardır. Yıldız yapılarının ilk incelenmeye başlandığında, yoğunluğu çok yüksek olan yıldızlar gizemli kalmıştır.

150 yıl kadar önce Bessel Sirius A'nın yörüngesindeki düzensizlikleri saptadı ve bunu ışıma-gücü düşük bir bileşenin etkisi olarak yorumladı [16]. Bundan 20 yıl kadar sonra, Bessel tarafından öngörülen bileşen gözlemlenerek, yoğunluğu 10^4 gm cm^{-3} (gerçekte $\simeq 3*10^6$ gm cm^{-3}) olarak belirlenmiştir.

1910'larda, Hertzsprung-Russel çizelgesi henüz Russel çizelgesiyken, beyaz cüceler de (BC) bu çizelgede yerini almıştı. Ana-kol yıldızlarının oluşturduğu eğrinin altında kalan beyaz cücelerin, en önemli özellikleri, düşük ışıma-gücüne karşın yüksek etkin-sıcaklığa, dolayısıyla gezegen ölçeğinde bir büyüklüğe sahip olmalarıydı [2].

1926'da Fermi ve Dirac elektronların Fermi-Dirac istatistiğine, Pauli dışlama ilkesi uyarınca, uyduğunu gösterdi. Fowler, hemen, bu istatistiği uygulayarakBC'de yerçekimine karşı gerekli basıncı hemen hemen tamamıyla soysuzlaşmış elektronların sağladığını ifade etti. 1929'da Andersen ve Stoner, Fowler 'in DUD'ne görecelilik doğrulamasını ekledi. İki yıl sonra Chandrasekhar, üç yıl sonra da Landau, ayrı ayrı, Chandrasekhar kütle sınırı diye bilinen saptamayı yaptı. Bu saptama, M_{ch} kütlesinden büyük kütleye sahip olan beyaz cücelerin soysuzlaşmış elektronların basıncıyla, yerçekimine karşı daha fazla dayanamayacağı gerçeği idi. Daha sonraki yıllarda, özellikle Chandrasekhar tarafından, DUD kuramı mükemmel bir şekilde geliştirildi.

Öte yandan soysuzlaşmış madde yalnızca beyaz cüceler gibi yıldızların ölüm evresinde değil, kırmızı devler gibi iç-kabuk yanmalı yıldızlarda da etkin bir biçimde varolabilmektedir ve He parlaması ile bazı SN tiplerinin

patlamalarında başlatıcı etken olarak [15] ele alınmaktadır.

Tamamiyle soysuzlaşmış elektron gazının DUD oldukça basittir. Soysuzlaşma az ise, DUD ancak sayısal olarak ifade edilebilinir. DUD'i üzerine yapılan çalışmalar çoğunlukla ya sayısal ya da yaklaşık yöntemlerle [4,5,6,7] DUD'ni, model hesaplamalarına daha uygun bir biçimde elde edilmesi üzerine olmakta. Bu çalışma da, DUD'ni sayısal olarak elde edilmesi üzerine yapıldı. DUD'ninkuramsal olarak irdelenmesi Chandrasekhar ve Cox'ın kitaplarında sunulmuştur.
II. kısımda bazı kaynaklardan alınan sonuçlar, özellikleriyle birlikte verilmiştir. III. kısım DUD'nin hesaplanma yöntemi, IV.kısım da sonuçlar için ayrılmıştır.

Sıcaklığın $10^4 < T < 10^{90}$K, yoğunluğun da $10^{-2} < \rho < 10^9$gm cm^{-3} aralığında, içerilen maddenin tamamen iyonize olmuş ve elektronların etkileşimsiz olduğu kabul edilmiştir. Bir çok fiziksel etkileşim [3,6,8] (ters β-çürümesi, kristalleşme,Coulomb etkileşimi vb.) ele alınmazken, göreceli enerji ilişkisi kullanıldı.
Bu nedenle, bu çalışmanın, bir çok, örtülemeyecek kadar, eksiklerinin bulunduğunu belirtmek gerekiyor.

II. DUD KURAMI

Pauli dışlama ilkesine uyan elektronların sayısal yoğunluğu istatistik fiziğinde [3,9], Cox'ın göstergemini (belirtilmediği sürece) izleyerek,

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e} N_o = \frac{8\pi}{h^3} \int_o^\infty \frac{p^2}{e^{-\psi+E(p)/kT}+1}\, dp, \qquad (1)$$

elektron basıncı ise

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_o^\infty \frac{p^3}{e^{-\psi+E(p)/kT}+1} \frac{\partial E}{\partial p}\, dp \qquad (2)$$

biçiminde ifade edilmektedirler. Bu her iki denklemde de bulunan payda n ve P'nin davranışlarını, ψ'ın değerine göre, birbirlerine çok yaklaştırır. Eğer $\psi << -1$ ise, serisel açılımla [1,3]

$$n_e = 8\pi \left[\frac{mc}{h}\right]^3 \beta \sum_{i=o}^{\infty} (-1)^i \frac{e^{(i+1)\psi}}{(i+1)} \left[e^{(i+1)/\beta} K_2\left(\frac{i+1}{\beta}\right)\right] \qquad (3)$$

ve

$$P_e = 8\pi \frac{m^4c^5}{h^3}\beta^2 \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{e^{(i+1)\psi}}{(i+1)^2}\left[e^{(i+1)/\beta} K_2\left(\frac{i+1}{\beta}\right)\right] \quad (4)$$

biçimiyle, $\beta=\frac{kT}{mc^2}$ ve $K_2\left(\frac{i+1}{\beta}\right)$ de Bessel fonksiyonu olmak üzere, literatürde yer almakta. $\psi >> 1$ için

$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{mc}{h}\right)^3\left[y^3 + 6c_2\beta^2\frac{2y^2+1}{y} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + 18c_4\beta^4\frac{1}{y^5} + 90c_6\beta^6\frac{7+6y^2}{y^9} + \ldots\right] \quad (5)$$

$$P_e = \frac{\pi}{3}\frac{m^4c^5}{h^3}\left[f(y) + 48c\beta_2 y^2\sqrt{y^2+1} + 48c\,\beta_4\frac{4(2y^2-1)\sqrt{y^2+1}}{y^3} - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots - 720c_6\beta^6\frac{\sqrt{y^2+1}}{y^7} + \ldots\right] \quad (6)$$

denklemleri Sommerfeld leması [1] uygulanarak elde edilmekte: bunlardaki y

$$y = \left((1+\psi\beta) - 1\right)^{1/2} \quad (7)$$

olarak tanımlıdır.

Tam soysuzlaşmanın gerçekleşmesi durumunda denklem (5) ve (6)'da sadece birinci terimlerin hesaplanması toplam n ve P için yeterlidir. Sistemin Fermi enerjisi, sisteme bir şekilde elektron eklediğimizi varsayarak, arttırılınabilinir. Sisteme verilen elektronların fazla olması, belirli bir noktadan sonra, durgun kütle enerjisinin etkisini ortadan kaldırır. Bu demektir ki, göreceli enerji yerine, aşırı göreceli enerji ilişkisi (E=pc) DUD hesabı için kullanılabilinir. Sonuçta da denklem (1) ve (2)'den

$$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} n_e^{4/3} \qquad (8)$$

politropik indisi 3 olan bir gaz için DUD ortaya çıkar.

$\psi \cong 1$ dolayında bir açılım olmadığı için, P ve n 'yi sayısal tümleme yöntemiyle çözmek gerekiyor. Guess'in ilk kez kullandığı Q fonksiyonlarının [4] yardımıyla,

$$n_e = \pi \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int_0^1 \frac{(u+u^{-1})^3 - 4(u+u^{-1})}{e^{-\psi+(u+u^{-1}-2)/2\beta} + 1} \frac{du}{u} = C_n \int F(u)\, du \qquad (9)$$

ve

$$P_e = \frac{\pi}{6} \left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int_0^1 \frac{(u+u^{-1})^4 - 8(u+u^{-1})^2 + 16}{e^{-\psi+(u+u^{-1}-2)/2\beta} + 1} \frac{du}{u}$$

$$= C_p \int G(u)\, du \qquad (10)$$

dönüşümleri,

$$\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} = \cosh\theta = \frac{u + u^{-1}}{2} \qquad (11)$$

olmak üzere yapılabilinir. Denklem (9) ve (10)'un en önemli özelliği sonsuz üst sınıra sahip olmamalarıdır.

III. DUD'NİN HESAPLAMA YÖNTEMİ

Hesaplama yöntemi üzerinde durulması gereken iki konu var: 1) $\psi \simeq 1$ dolayında sayısal yöntem; 2) ψ'ın bağımsız değişken olamayacağı göz önünde tutulursa verilen (ρ/μ)-T değerlerine göre ψ'ın bulunması. $\psi << -1$ ve $\psi >> 1$ kısımlarında DUD üzerinde durulmayacak kadar basittir.

1) Sayısal Tümleme

Denklem (9) ve (10)'da verilen integralin içindeki F(u) ve G(u) fonksiyonları [0,1] aralığında oldukça düzenlidir ; her iki fonksiyon içinde bir tane tepe vardır. Bu konum sayısal tümleme için oldukça uygundur. Yöntem olarak Gaussian 2-nokta formülü [12] [0,1] aralığı Δ genişliğinde eşit uzunluklara bölünerek her bir Δ aralığına ayrı ayrı uygulandı. Elde edilen sonuç şudur:

$$n_e = \frac{\pi}{2} \frac{m^3 c^3}{h^3} \Delta \sum_{m=0}^{1/\Delta} [\, F(d_0 + m\Delta) + F(d_1 + m\Delta) \,] \qquad (12)$$

ve

$$P_e = \frac{\pi}{12} \frac{m^4 c^5}{h^3} \Delta \sum_{m=0}^{1/\Delta} [\, G(d_0 + m\Delta) + G(d_1 + m\Delta) \,] \qquad (13)$$

biçimindedir:

$$d_0 = \frac{1}{2} (1 - 3^{-1/2}), \quad \text{ve} \quad d_1 = \frac{1}{2} (1 + 3^{-1/2}) \qquad (14)$$

olmak üzere.

ii) ψ 'ın Bulunması

Verilen (ρ/μ)- T değerlerine göre, gerektiği zaman ψ'ı tekrarlanan hesaplamalarla bulabiliriz. Bunun için, ψ'ın log(n_e) 'ye karşı değişimi parabola çok yakın olduğundan (T sabit), aşağıdaki tanımı yapabiliriz:

$$\psi = A \left(\log n_e\right)^2 + B \left(\log n_e\right) + C. \qquad (15)$$

Burada yapılması gereken, denklem (15)'i sağlayan A, B, C'leri bulmaktır. Eğer üç keyfi noktada ψ'a karşılık gelen log(n_e) 'leri, önceki kısımlarda ele alınan yöntemle hesaplarsak, elimizde ilk A, B, C değerleri olacaktır. Soysuzlaşma parametresini bulmak istediğimiz log(n_e), ve A, B, C 'yi denklem (16)'da yerine koyarsak, ψ_c gibi bir değer buluruz. Bu ψ_c değerine denk gelen n_{ec}, n_e ile kıyaslanarak ψ_c'nin bizim (n_e- T) çiftine denk gelip gelmediğini kontrol edebiliriz. Beklenebileceği gibi, n_{ec}, n_e'den çok farklı ise, ilk üç (ψ - n_e) çiftlerinden uygun olan birisini atıp, bunun yerine ψ_c-n_{ec}) çiftini kullanarak A, B, C'yi yeniden hesaplayabiliriz. Böylece bu işlem devam ettirildiğinde, (n_e - T) çiftine tekabül eden ψ değerine çok yaklaşacağımızdan, gerçek ψ değerini kolayca bulabiliriz.

IV. SONUÇ

Önceki kısımlarda üzerinde durulan DUD'leri bütün (ρ/μ_e-T) düzlemini kapsayacak bir şekilde eklemlenebilir. Belirtilmesi gereken bir nokta var ki, o da ψ 'ın hangi aralıkları için hangi DUD 'lerinin kullanılacağıdır. Bu, hesaplamalarda (denetlenebildiği kadarıyla) izin verilen hata miktarına da bağlıdır. Biz bu çalışmada, belki gereğinden fazla hassaslıkla, elektron basıncını ilk beş mertebesine (tabii ki eksponensiyel çarpanıyla birlikte) kadar hesapladık; hata son mertebede ∓ 1 'dir. Bu hata oranıyla, DUD 'lerine karşılık gelen ψ aralıkları şöyledir [8];

$\psi \leq -8.3$	Gerçek gaz DUD.
$-8.3 < \psi \leq -0.1$	Denklem (3) ve (4)
$-0.1 < \psi \leq 7$	Denklem (12) ve (13)
$7 \leq \psi \leq 1000$	Denklem (5) ve (6)
$1000 \leq \psi$	Denklem (5) ve (6) 'nın ilk terimleri

Denklem (7) 'de verilen y 'nin 310 'dan büyük olmasındaysa, denklem (8) 'de verilen DUD geçerlidir.

Bu yöntemi uygulayarak bazı küçük kütleli yıldızların [13] merkez basıncı ve bu basınç içerisindeki soysuzlaşmanın etkisi yüzde olarak bulundu; sonuç tablo halinde sunulmuştur. Bu tabloda P_T [1,2,11], elektron, gerçek gaz ve radyasyon basıncının toplamıdır.

Bu çalışma da ayrıca göreceli olmayan enerji ilişkisi de kullanılarak, göreceli enerji ilişkisiyle elde edilen sonuçlarla kıyaslandı. Sonuç olarak, eğer sıcaklık 10^4 ^oK 'den küçük değilse, bu hatayla, göreceli olmayan enerji ilişkisi kullanılamaz.

Kaynaklar

[1] Chandrasekhar, S., 1967, An Introduction to the Stellar Structure, Dower Publications, Inc., New York.
[2] Motz, L., 1970, Astrophysics and Stellar Structure, Ginn and Company, Waltham, Mass..
[3] Cox, J.P., ve Giuli, R.T., 1968, Principles of Stellar Structure, Gordon and Breach, Vol.I, and Vol.II, Zurich.
[4] Guess, A.W., 1966, " The Degenerate Gas ", Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol.IV, pp.153-232.
[5] Divine, N., 1965, "Numerical Evaluation of Degenerate Equation of State", Asp. J., Vol.212, No.4, pp.1652-1655.
[6] Eggleton, P.P.,et.al., 1973, "An Approximate Eq. of St.for the Stellar Mat.", Ast.& Asp.,Vol.23, pp. 325-330.
[7] Bludman, S.A., ve Van Riper, K.A., 1977, "Equation of State of an Ideal Fermi Gas ", Asp.J., Vol.212, No.3, pp.859-872.
[8] Immshennik, V.S., ve Nadezhin, D.K., 1966, "Thermod. Prop. of Mat. at High Den. and Temp.", Soviet Ast.-AJ, Vol.9, No.6, pp.896-906.
[9] Landau, L.D., ve Lifshits, E.M., 1980, Statistical Physics, Pergamon Press, New York.
[10] Herz, M.A., 1968, "Num. Ev. of Elect. Eq. of St. with Pair Creation",Asp. J., Vol.153, No.3, pp.1011-1013.
[11] Shlovski, I.S., 1978, Stars: Their Birth, Life, and Death, W.H.Freeman and Company, San Fransisco.
[12] Aktaş, Z., 1973, Numerical Analysis, Pt.1, ODTÜ, Ankara.
[13] Kızıloğlu, N., ve Ezer-Eryurt, D., 1987, " Pregalactic- Primordial Low-Mass Stars", Asp. and Space Science, Vol.136, pp.83-90.
[14] Yıldız, M., ve Eryurt, D., 1989, Equation of State For the Stellar Mat., Yük. Lis. Tezi.
[15] Nomoto, K., 1981, Fund. Prob.in the Theory of Stellar Evol. pp.295-315
[16] Koester, D., ve Chanmugam, G., 1990, "Physics of White Dwarf Stars",Rep. Prog. Physics,Vol.53, pp.837-915.