FRIEDMANN EVRENLERİNİN ROTASYONEL PERTURBASYONLARI(*)

C.Battal, İ.Yavuz, H.Baysal
Ege Üniversitesi Fen Fakültesi
Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü

ÖZET

Bu çalışmada Friedmann Evrenlerinin rotasyonel perturbasyonları incelenmiştir. İdeal akışkan özel halinde pertürbe alan denklemleri exact olarak çözülebilmiştir. Bu çözümler $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$ vermiştir. Bu durumda bir koordinat dönüşümüyle $\vec{\Omega} = 0$ haline gelir ve sonuçta klasik Friedmann çözümlerine ulaşılır. Bu nedenle diğer araştırmacılar tarafından elde edilen yaklaşık çözümler fiziksel içerikten yoksun çözümler durumuna gelmektedir.

GİRİŞ

Einstein Alan Denklemlerinin 1922 yılında Friedmann (Friedmann 1922) tarafından bulunan kozmolojik çözümleri evrenin büyük ölçekte gözlenen genişleme, homogenite ve izotropy gibi özelliklerini en iyi yansıtan çözümlerdir. Her ne kadar kozmolojik sabitin büyüklüğü, kayıp maddenin bugünki değeri gibi henüz çözümlenmemiş bazı problemlere karşın bu çözümler evrenin global özelliklerini bugünde açıklayabilen çözümlerdir (mevcut olan bazı farklılıklar ihmal edilmesi düşünülebilecek kadar küçüktürler). Bu nedenle Einstein Alan denklemlerinin bu tip çözümleri keşiflerinden bu yana yoğun bir şekilde incelenmektedir. Şu sıralarda da bu çözümlerin çeşitli pertürbasyonları bu incelemelerin merkezini oluşturmaktadır (Lifshitz and Khalatnikov, 1963; Sach and Wolfe, 1966; Hawking, 1969; Silk and Wright, 1969; Saslaw, 1972; Collins and Hawking, 1973; Sanz, 1989; Bayın and Cooperstock, 1980; Tarachand and Sing,1987; Koijam, 1987,1988;ve Singh 1988). Bu perturbasyonlar hemen hemen tümü yogunluk, distortion ve Friedmann Evrenlerinin rotasyonu ile ilgilidir.

Rotasyonel perturbe edilmiş metriğe ait alan denklemlerinin çözümleri ise ideal akışkan durumunda Bayın and Cooperstock (1980) ve Singh(1988) tarafından elde edilmiştir. Bu çözümlerde Friedmann evrenlerinin slow rotasyon yaptığı varsayılmıştır. Matematik olarak bu yaklaşım lokal eylemsiz sistemin rotasyon ekseni etrafındaki dönmesine karşılık gelen $\vec{\Omega}(r,t)$ açısal hız fonksiyonunun perturbe edilmiş metrik ve ona ait alan denklemlerinde birinci mertebeden alınmasıyla ifade edilmiştir.Bu varsayımlardan başlayarak bu yazarlar $\vec{\Omega}(r,t)$ çözüm fonksiyonunun r-bağlılığı için bir çok exact ifadeler bulmuşlardır.

(*) Bu çalışma Astrophysics and Space Science, 167,341-345 de yayınlanmıştır.

Çözüm fonksiyonlarının bazı özelliklerini izah edebilmek için bu yazarlar tarafından da perturbe edilmiş metriğe birden daha yüksek mertebede $\vec{\Omega}$ (r,t) kapsayan bazı terimlerin ilave edilmesi gereği vurgulanmıştır (Bayın and Cooperstock, 1980, p,2322, remark 20).

Bu çalışmamızın amacı ideal akışkan durumunda pertürbe edilmiş metriğe ait alan denklemlerinin exact çözümlerini araştırmak ve onları yukarıda refere edilen yazarlar tarafından bulunan yaklaşık çözümlerle karşılaştırmaktır.

ALAN DENKLEMLERİ

Bilindiği gibi $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \phi\}$ Robertson- Walker koordinatlarında Friedmann evreninin metriği

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right] \qquad (1)$$

formuna sahiptir. Burada R(t) ölçek fonksiyonu, k, pozitif, negatif, sıfır sabit eğrilikli 3 boyutlu uzaylara karşılık gelmek üzere +1,-1,0 değerlerini alabilen bir sabittir.(Buna R(t) ölçek fonksiyonunda bir dönüşüm ile ulaşılabilir) (Robertson (1929); Walker(1936)).

Eğer lokal eylemsiz sistemin rotasyon ekseni boyuncaki açısal hız fonksiyonunu $\vec{\Omega}$ (r,t), $d\phi \longrightarrow d\phi - \vec{\Omega}(r,t)dt$ şeklinde bir ikame ile (1) metriğine ithal edilirse, $\vec{\Omega}$ (r,t) içeren hiç bir terimin ihmal edilmediği genel halde perturbe olmuş metrik

$$ds^2 = (1 - R^2 r^2 \sin^2\theta\, \Omega^2)dt^2 - R^2\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 - 2r^2 \sin^2\theta\, \Omega\, d\phi\, dt\right\} \qquad (2)$$

elde edilir ($d\phi$ için $d\phi - \vec{\Omega}(r,t)$ kullanılması Bayın ve Cooperstock(1980) ve Singh(1988) tarafından yapılmıştır, fakat onlar (2) metriğinde Ω^2 terimi ihmal ederek dt^2 nin katsayısını birim olarak almışlardır).

Eğer Evrenin rotasyon ekseni civarında dönen ideal bir akışkanla dolu olduğu kabul edilirse akışkanın 4 - lü hız vektörü u^i aşağıdaki şu bileşenlere sahip olur (Chandrasekhar and Friedmann, (1972); Singh, (1988), $V^2 = 0$ durumunda, Bayın and Cooperstock (1980)):

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \frac{dt}{ds} = (1-V^2)^{-1/2}, \\ u^1 &= u^2 = 0, \\ u^3 &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{ds} = W(1-V^2)^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$u^i u_i = 1, \qquad (4)$$

burada

$$W = \frac{d\phi}{ds} \qquad (5)$$

seçilen koordinat sisteminde maddenin açısal hızıdır ve V^2de

$$V^2 = R^2(t)r^2\sin^2\theta(W - \vec{\Omega})^2 \qquad (6)$$

ifadesini haizdir. Gravitasyon alanı için Einstein denklemleri

$$R_{ik} = -\chi\,(T_{ik} - \tfrac{1}{2}Tg_{ik}) + \Lambda g_{ik} \qquad (7)$$

dır. Burada $\chi = 8\pi G$; $c = 1$; Λ kozmolojik sabittir. İdeal akışkan için enerji momentum tensörü ise

$$T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k - Pg_{ik} \qquad (8)$$

şeklinde verilir. Burada ρ madde yoğunluğu p, de madde basıncıdır. (2) Metriğinden yararlanarak Einstein Alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_{00}:\quad -(1-kr^2)r^2\sin^2\theta\,\Omega''\Omega - \tfrac{1}{2}(1-kr^2)R^4r^4\sin^4\theta\,\Omega^2\Omega'^2 -$$

$$-\tfrac{1}{2}(1-kr^2)\sin^2\theta\,\Omega'^2 + \left(\frac{5kr^2-4}{r}\right)r^2\sin^2\theta\,\Omega\Omega' +$$

$$+(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2\sin^2\theta\,\Omega^2 - \frac{3\ddot{R}}{R} =$$

$$= -\chi\left\{\frac{\rho+P}{1-V^2}\,[1 - R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega(\Omega-\omega)]^2 -\right.$$

$$\left.-\frac{\rho-P}{2}\,(1 - R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega^2)\right\} + \Lambda(1 - R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega^2), \qquad (9)$$

$$R_{11}:\quad (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) + \tfrac{1}{2}(1-kr^2)R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega'^2 = -R^2\left(\chi\,\frac{\rho-P}{2} + \Lambda\right), \qquad (10)$$

$$R_{22}:\quad (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) = -R^2\left(\chi\,\frac{\rho-P}{2} + \Lambda\right), \qquad (11)$$

$$R_{33}:\quad (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) - \tfrac{1}{2}(1-kr^2)R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega'^2 =$$

$$= -R^2\left[\chi\left(\frac{\rho+P}{1-V^2}\,V^2 + \frac{\rho-P}{2}\right) + \Lambda\right], \qquad (12)$$

$$R_{01} = R_{10}:\quad -\tfrac{3}{2}R\dot{R}r^2\sin^2\theta\,\Omega\Omega' - \tfrac{1}{2}R^2r^2\sin^2\theta\,\Omega\dot{\Omega}' = 0, \qquad (13)$$

$$R_{03} = R_{30}:\quad \tfrac{1}{2}(1-kr^2)r^2\sin^2\theta\,\Omega'' + \tfrac{1}{2}(1-kr^2)R^4r^4\sin^4\theta\,\Omega\Omega'^2 -$$

$$-\left(\frac{5kr^2-4}{2r}\right)r^2\sin^2\theta\,\Omega' - (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2\sin^2\theta\,\Omega =$$

$$= R^2r^2\sin^2\theta\left\{-\chi\left[\frac{\rho+P}{1-V^2}\,(\Omega - \omega - R^2r^2\cdot\sin^2\theta\,\Omega(\Omega-\omega)^2) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\rho-P}{2}\,\Omega\right] + \Lambda\Omega\right\}, \qquad (14)$$

$$R_{13} = R_{31}:\quad \tfrac{3}{2}R\dot{R}r^2\sin^2\theta\,\Omega' + \tfrac{1}{2}R^2r^2\sin^2\theta\,\dot{\Omega}' = 0, \qquad (15)$$

Buradaki nokta ve çizgiler sırasıyla t ve r ye göre parçalı türevi göstermektedir.

EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Alan denklemlerinin çözümünde ilk göz önüne alınacak denklem (11) denklemidir. Bu denklem görüldüğü gibi $\vec{\Omega}$ ya bağımlı değildir ve perturbe olmamış metriğe ait alan denklemlerinden birini vermektedir(Weinberg 1972, p: 472, Λ =0). (10) ve (11) denklemlerinden

$$\vec{\Omega}' = 0 \Longleftrightarrow \vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t) \qquad (16)$$

elde edilir. (16) Denklemi göz önüne alındığında (13) ve (15) denklemleri özdeş olarak sağlanırlar. Eğer (11) ve (16) denklemini aynı anda (12) de kullanılırsa bu da

$$V^2 = 0 \Longleftrightarrow W = \vec{\Omega} \qquad (17)$$

verir.

Fiziksel olarak ilginç olmayan durum denklemine karşılık geldiğinden $p = -\rho$ ise göz önüne alınmamıştır. (11) ve (16) denklemleriyle (14) denklemide sağlanır. Eğer (16) denklemi (11) ile birlikte bir kez daha kullanılırsa (9) denklemi

$$3\frac{\ddot{R}}{R} - \varkappa\frac{\rho+3p}{2} + \Lambda = 0 \qquad (18)$$

haline gelir. Bu denklemde perturbe olmamış metriğe ait alan denklemlerinden biridir (Weinberg 1982, p:472,Λ = 0).

Perturbe olmuş (2) metriğinin alan denklemlerinin, perturbe olmamış (1) metriğinin alan denklemlerine dönüşüyor olması sonucu direk (16) denkleminden de görülebilir. Zira $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$ durumunda şöyle bir koordinat dönüşümü

$$\psi = \phi - \int \vec{\Omega}(t)\,dt \qquad (19)$$

ile perturbe edilmiş (2) metriği, (t,r,θ,ψ) koordinatlarında perturbe olmamış (1) metriğine dönüştürülebilir.

SONUÇ

Perturbe edilmiş (2) metriği için elde edilen (9)-(15) alan denklemleri $\vec{\Omega}$ nın r den bağımsız olduğunu gösterir. Bunun sonucu olarak $\partial\vec{\Omega}/\partial r \neq 0$ esasına dayalı diğer yazarlar tarafından elde edilmiş yaklaşık çözümler geçerli olamaz ve bu çözümlere fiziksel bir anlam vermek imkansızdır. Nitekimde (16) denklemi (19) sonucuna götürdüğünden fiziksel anlamda gerçek bir rotasyonda yoktur. Zira (19) ile $\vec{\Omega}$ = 0 yapılabilir.

Yukarıdaki bu sonuç, lineer olmayan denklemler teorisinde yapılacak keyfi bir yaklaşımın (approximation) yanlış sonuç verebilecegine ilişkin bir örnektir.

Perturbe olmuş (2) metriği, Friedmann metriği($V^2 = 0 \Rightarrow W = \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t) \Rightarrow \vec{\Omega} \rightarrow 0$ olduğu durum), Bayin and Cooperstock (1980) ve Singh (1988) kullandıkları metrik (birden daha yüksek mertebede $\vec{\Omega}$ (r,t) kapsayan terimlerin ihmal edildiği durum) ve Friedmann metriğinin daha genel perturbasyonlarını kapsamaktadır. Slow rotasyon kabul edildiğinden de küresel simetriden sapmalar bizim durumumuzda ihmal edilmiştir.

KAYNAKLAR

Bayin,S.S.and Cooperstock,F.I.:1980,Phys.Rev.D.22,2317.
Chandrasekhar,S. and Friedmann John L.:1972,Astrophys.J.175,379.
Collins,C.B.and Hawking,S.:1973,Mon.Not.R.Astron.Soc.162,307.
Friedmann,A.:1922,Z.Phys.10,377.
Hawking,S.:1969,Mon.Not.R.Astron.Soc.142,129.
Lifshitz,E.M.and Khalatnikov,I.M.:1963,Adv.Phys.12,208.
Robertson,H.P.:1929,Proc.Nat.Acad.Sci.USA,15,822.
Sachs,R.K.and Wolfe,A.M.:1966,Astrophys.J.147,73.
Sanz,J.L.:1979,Phys.Rev.D.20,1791.
Saslaw,W.C.:1972,Astrophys.J.173,1.
Silk,J.and Wright,J.P.:1969,Mon.Not.R.Astron.Soc.143,55.
Singh,Ng.I.:1988,Astrophys.Space Sci.148,199.
Walker,A.G.:1936,Proc.London Math.Soc.42,90.
Weinberg,S.:1972,Gravitation and Cosmology:Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley,New York.