Trigonometrik Paralakslarda Lutz-Kelker Yanlılığı Üzerine

Zeki ASLAN

Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü
e-mail: aslan@sci.akdeniz.edu.tr

ÖZET: Lutz ve Kelker (1973), gözlenen trigonometrik paralaksların tüm yıldızlar için gerçek paralakslardan daha büyük olduğunu, bu paralakslardan hesaplanan salt paralaksların yanlı (biased) olduğunu savunmuşlar ve uygulanması gereken düzeltmeleri hesaplamışlardır. Bu bildiride, gözlenen paralakslarda sistematik bir etki olmadığı, bireysel yıldızlar için Lutz-Kelker düzeltmesi denen düzeltmeye gerek olmadığı vurgulanmıştır.

1. Giriş:

Trumpler ve Weaver (1953) "yıldızlar gözlenen paralaks değerlerinin bir alt sınırına göre seçilirse, ölçülen paralaksı gerçeğinden büyük olan yıldızları tercih etmiş oluruz. Gözlenen paralaks değerlerinden hesaplanan salt parlaklıklar böylece aslından büyük olur" demişlerdi. Lutz-Kelker (1973)'e göre bu sistematik etki, paralaksın alt sınırının seçimine bağlı değildir; her paralaks değerinde vardır ve "gözlemsel hata ile, yıldız sayısının paralaksı küçüldükçe artmasının sonucudur". Lutz-Kelker (LK) bu sistematik etkiyi, yıldızların uzayda düzgün dağıldığını ve gözlenen paralaksın gerçek paralaks etrafında normal dağılım gösterdiğini varsayarak, analitik olarak hesaplamaya çalışmışlardır. Gözlenen paralaks π_0'ın gerçek paralaks π etrafındaki dağılımıdır.

$$g(\pi_0|\ \pi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2pi}}\ e^{-(\pi_0-\pi)^2/2\sigma^2} \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir, burada σ, π_0 'ın standart hatası, *pi* = 3.141… sayısıdır. Yıldız sayı yoğunluğu sabit ise, uzaklığı r ile r + dr arasındaki yıldızların sayısı

$$N(r)dr \quad \propto \quad 4pir^2dr$$

yada paralaksları π ile $\pi + d\pi$ arasında olanların sayısı

$$N(\pi)d\pi \propto \frac{4pid\pi}{\pi^4} \tag{2}$$

olur. LK'ye göre, verilen bir π_0 etrafında π nin dağılımı denklem (1) ile (2) nin çarpımı olmalıdır:

$$g(\pi_0|\ \pi) \propto \frac{1}{\pi^4}\quad e^{-(\pi-\pi_0)^2/2\sigma^2}$$

ya da, π_0 sabit alındığından

$$g(\pi|\ \pi_0) = C\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^4 e^{-(\pi-\pi_0)^2/2\sigma^2} \tag{3}$$

burada C birimleştirme sabitidir.

$Z \equiv \dfrac{\pi}{\pi_0}$ yazarak, (3) denklemini LK şöyle ifade etmişti:

$$g(\pi|\ \pi_0) \propto\ G(Z) \equiv \frac{1}{Z^4}\ e^{-(Z-1)^2/2(\frac{\sigma}{\pi_0})^2} \tag{4}$$

LK'e göre, σ sabit olduğu sürece, (4) denklemi boyutsuz olarak, gözlenen belli bir paralaks için gerçek paralaksların dağılımını temsil eder (2. bölümde bunun yanlış olduğu vurgulanacaktır). Salt parlaklık düzeltmesi

$$\Delta M = M_{gerçek} - M_{gözlenen} = 5\log\frac{\pi}{\pi_0} \equiv 5\log Z \tag{5}$$

olacağından ortalama düzeltme için şöyle yazılabilir (LK 1973):

$$\langle \Delta \mathrm{M} \rangle = \frac{5\int_0^\infty \log Z\ G(Z)dZ}{\int_0^\infty G(Z)dZ} \tag{6}$$

π, $(0,\infty)$ aralığında değiştiği için (6) denklemi tanımsızdır. Bundan kurtulmak için LK integralin alt sınırını keyfi bir $\in$ sayısından başlatmışlar ve $\in$ = 0.25 ile 0.01 aralığında çeşitli $\frac{\sigma}{\pi_0}$ değerleri için sayısal integrasyonla <ΔM> yi hesaplamışlardır. Üst sınır Z = 1.5 alınmış ve G(Z) nin küçük Z 'deki davranışının önemsiz olduğu vurgulanmıştır. Hesaplanan <ΔM> değerlerinin artan σ/π_0 değerleri ile arttığı, σ/π_0 = 0.175 de <ΔM> = -0.43 kadire ulaştığı, daha büyük σ/π_0 için hızla büyüdüğü belirtilmiştir.

Daha sonra Turon ve diğ. (1977) ve Lutz (1979), G(Z) için genellikle ışınım gücü fonksiyonu kullanmak gerektiğini vurgulamışlardır. Hanson (1979), 4. denklemin paydasındaki Z nin kuvvetinin 4 den farklı olabileceğini savunmuş ve bu kuvvetin öz hareketlerden pratik olarak nasıl hesaplanabileceğini anlatmıştır. Bir dizi makalede Smith (1987 a,b,c) salt paralaks kalibrasyon sorununu incelemiş, ΔM düzeltmesinin yalnız σ / π_0 oranına değil M nin kendisine, M deki gerçek dağılıma ve gözlenen paralaks π_0'a da bağlı olduğu sonucuna varmıştır. Bunların hepsinin temel denklemi denklem (4) dür. Oudmaijer v.d. (1998) , yerden ölçülen paralakslar ile Hipparcos paralakslarını karşılaştırınca LK düzeltmesi mertebesinde düzeltmeye gerek olduğunu bulmuşlardır. Öte yandan Fuchs ve Jahres (1998) yaptıkları benzetişim (simulation) ile LK düzeltmesinin tersi bir düzeltme bulmuşlardır. Görülüyor ki, eğer gerçekten gerekiyorsa, LK düzeltmesinin nasıl hesaplanacağı konusunda literatürde fikir birliği yoktur.

2. Ölçülen Paralakslarda İstatistik Etkiler:

2.1. Bireysel yıldızlar:

Bir yıldızın paralaksı, ya da uzaklığı, astrofizik bir kemiyet değildir. Adından da anlaşıldığı gibi, trigonometrik paralaks "üçgen ölçümü" ile bulunmaktadır. Her ölçülen kemiyet gibi, paralaksın da ölçüm hatası vardır. Ölçme işleminin ve ölçme hatasının, dolayısıyla paralaksın kendisinin diğer yıldızlarla ilgisi olamaz (Açısal kaymaları ölçecek koordinat sisteminin olduğunu kabul ediyoruz). O halde trigonometrik paralakstan hesaplanan salt parlaklıktaki herhangi bir istatistik etki, yalnız ölçme işleminden ve ölçme hatasından kaynaklanacaktır. Bu demektir ki bireysel yıldızlar için LK yanlılığı (bias) söz konusu olamaz.

Eğer ölçülen paralaksın bir hata dağılımı varsa salt parlaklıkların hesaplanmasında esas sorun

$$E(\log \pi) \neq \log[E(\pi)]$$

eşitsizliğidir, burada E "beklenilen değer" işlemcisini temsil eder. (Bir başka deyişle, genel olarak logaritmaların ortalaması, ortalamanın logaritmasına eşit değildir). Verilen bir yıldız için 5. denklemi söyle yazabiliriz:

$$\Delta \mathrm{M} = 5\log\frac{\pi}{\pi_0} = 5\log\left(1+\frac{\in}{\pi_0}\right) \qquad (7)$$

Burada $\in \equiv \pi - \pi_0$ ölçülen paralaks π_0 'ın hatasıdır. Hipparcos paralakslarının hataları Gauss dağılımı ile temsil edilebilmektedir (ESA 1997, Kovalevsky 1998). O halde gerçek paralaks π nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\pi) = \frac{1}{\sigma_\pi \sqrt{2pi}} \exp\left[-\frac{(\pi-\pi_0)^2}{2\sigma_\pi^2}\right] \qquad (8)$$

şeklinde olacaktır. Verilen bir yıldız için ΔM 'nin beklenilen değeri dolayısıyla

$$E(\Delta \mathrm{M}) \equiv \delta \mathrm{M} = 5E\left[\log\frac{\pi}{\pi_0}\right] = \frac{5\int_0^\infty \log\left(\frac{\pi}{\pi_0}\right) f(\pi)\, d\pi}{\int_0^\infty f(\pi)\, d\pi}$$

(9)

ile verilecektir. (9) denklemi G(Z) = f(π) için (6) ile aynıdır ve π = 0 da aynı tekilliğe sahiptir. Görülüyor ki LK ve diğerlerinin (6) denkleminde kullandığı ve (4) ile verilen G(Z) yanlıştır. Çünkü (3) denklemi doğru bir Bayesian formülasyonu değildir: ölçülen paralaks π_0 'ın hatasının ($\in \equiv \pi - \pi_0$) normal dağılım gösterdiği kabul edilmektedir. Bu durumda eğer denklem (3) de üs içindeki π gözlenen π_0'a karşılık gelen gerçek paralaks ise paydadaki $\pi^4 \equiv (\pi_0 + \in)^4$ gerçek yıldızların uzay dağılımını temsil edemez. Öte yandan eğer ele alınan yıldızların π ile $\pi + d\pi$

arasındaki sayısı $N(\pi) \propto \frac{4pid\pi}{\pi^4}$ ise, o zaman denklem (3) deki σ, π_0 'ın π etrafındaki dağılımının (ölçü hatasının) standart sapması olamaz. Dolayısıyla bir yıldızın "en olası gerçek paralaksı" nı ya da salt parlaklığını hesaplarken (3) şeklindeki bir denklemi (LK; Turon v.d. 1977; Lutz 1979, Smith 1987a) ya da benzerini (Hanson 1979, Koen 1992) kullanmak geçerli olamaz.

2.2. Bir grup yıldızın ortalama salt parlaklığı:

$\pi > 0$ için sayısal integrasyon ile (9) da δM nin hesaplandığını varsayalım. O zaman verilen bir yıldızın salt parlaklığı $M = M_0 + \delta M$ olacaktır. Burada $M_0 \equiv M_{gözlenen} = m + 5 + 5 \log \pi_0$ 'dır. Diyelim aynı tayf sınıfından bir grup yıldızın (örneklem) salt parlaklığı hesaplanacak, yani bu tayf sınıfının parlaklığı kalibre edilecektir. Örneklem içindeki her yıldız için

$$M_i = M_{0i} + \delta M_i$$

yazılabilir. Örneklem içindeki salt parlaklık dağılımının şimdilik $\sigma_M = 0$ olduğunu kabul edelim. Yıldızların uzay dağılımı, sınır paralaksı, ya da görünen parlaklık sınırı ne olursa olsun, bu durumda grubu kalibre etmek için tek bir yıldız yeterlidir. Örneklem (grup) içindeki yıldızlar üzerinden (ağırlıklı) ortalama almak gözlemsel hataların etkisini küçültecektir:

$$\overline{M} = \overline{M_0} + \overline{\delta M} \quad (10)$$

Ortalama parlaklık $\overline{M}$ etrafındaki saçılma yalnız gözlemsel hataların ölçüsü olacaktır. Dolayısıyla $\sigma_M = 0$ durumunda $\pi_0 = 0''.114 \pm 0''.020$ için Smith (1987c) tarafından δM için görünen parlaklık sınırı 8^m de $\delta M = +1^m.72$, ve görünen parlaklık sınırı 12^m de $\delta M = -2^m.28$ bulunması gerçekçi değildir.

Eğer $\sigma_M \neq 0$ ise, ve örneklem yıldızları bir görünen parlaklık sınırından daha parlak seçilmişlerse, o zaman (10) ile bulunan ortalama parlaklık aslından daha parlak olacaktır. Malmquist yanlılığı (bias) denen bu yanlılık düzeltilmelidir. Bu durumda (10) eşitliği

$$\overline{M} = \overline{M_0} + \overline{\delta M} + K\sigma_M^2 \quad (11)$$

olur. Son terim Malmquist düzeltmesidir; pozitif bir sayı olan K, ele alınan yıldızların uzay dağılımına bağlıdır (Bkz. Luri v.d.1993, Şekil 1 ve 2). Düzenli yıldız dağılımı için K = 1.38 (Malmquist 1936).

Kaynaklar

ESA. 1997 The Hipparcos Catalogue, ESA SP-1200

Fuchs, B., Jahres, H. 1998, *A&A*, 329,81

Hanson,R.B. 1979, *MNRAS*, 186,875

Koen, C. 1992, *MNRAS*, 256, 65

Kovalevsky, J. 1998 *A&A*, 340, L35

Luri, X., Mennessier, M. O., Torra, J. v.d. 1993, *A&A*, 267,305

Lutz, T. E., Kelker, D. H., 1973, *PASP*, 85, 573

Lutz, T. E., 1979, *MNRAS*, 189, 273

Malmquist, K. G., 1936, *Stockholms Obs. Med.* No. 26

Oudmaijer, R. D., Groenewegen, M. A. T., Schrijver, H., 1998, *MNRAS*, 294, L41

Smith, H., 1987a, *A&A*, 171, 336

Smith, H., 1987b, *A&A*, 181, 391

Smith, H., 1987c, *A&A*, 188, 233

Trumpler, R., J., Weaver, H. F., 1953, *Statistical Astronomy*, Berkeley Unv. Pres.

Turon Lacarrieu, C., Crézé, M., 1977, *A&A*, 56, 273.