

YEREL AKIMLARIN NEDEN OLDUĞU MANYETİK ALAN GRADYENTİNİN AÇISAL MOMENTUM TAŞINIMINA KATKISI

Ebru DEVLEN¹, E.Rennan PEKÜNLÜ²

Özet

Toplanma disklerinin diferansiyel dönme ve zayıf manyetik alan varlığı altında kararsız olduğu ve açısall momentumun dışarıya taşındığı biliniyor. Manyetik-Dönme Kararsızlığı Hall e.m.f. ve manyetik alan içindeki elektronların hareketinden ortaya çıkan akımların varlığında çalkantıya dönüşür. Ancak sınır bölgesindeki parçacıklar tekdüze olmayan bir manyetik alan duyumsayarak, alan ve alan gradyentine dik doğrultuda bir sürüklenmeye (drift) uğrayacaktır. Bu etkiyi de dikkate alarak yerel eksensimetrik modların büyümesini inceledik. Manyetik dönme kararsızlığının maksimum büyüme oranının diskin yerel Oort-A değerinin yaklaşık dört katı olduğunu bulduk. Yerel akımların neden olduğu manyetik alan gradyentinin dikkate alınmadığı durumda, kararsızlık yalnızca manyetik alan ve açısall hızın zıt yönlü ($B \uparrow \downarrow \Omega$) olması halinde ortaya çıkarken, gradyentin dikkate alınmasıyla kararsızlık hem $B \uparrow \downarrow \Omega$ hem de $B \uparrow \uparrow \Omega$ durumlarında ortaya çıkar. Bu sonuç yerel akımların doğurduğu tüm etkileri dikkate aldığımızda kararsızlığın daima varolacağına işaret eder.

Anahtar Sözcükler: Toplanma diskleri, manyetik-dönme kararsızlığı, diyamanyetizm.

Abstract

It is well-known that the differentially rotating disks with a weak magnetic field are unstable and show enhanced angular momentum transport in radial direction. Magneto rotational instability (MRI), in the presence of Hall e.m.f. and the magnetization currents produced by electrons grows into turbulence. But the electrons, near the magnetization current circuit, will be, under the influence of the magnetic field gradient, go through a drift motion. Taking into account all these effects we investigated the growth rate of the local axisymmetric unstable modes. We showed that the maximum growth rate of the MRI is four times greater than the local Oort-A value. If the magnetic field gradient produced by the magnetization current is ignored then the MRI is present only when the magnetic field and the angular velocity vectors are anti-parallel ($B \uparrow \downarrow \Omega$), otherwise the disk is unstable in both cases ($B \uparrow \downarrow \Omega$), $B \uparrow \uparrow \Omega$. Our result indicates that the MRI will always be present if we take the currents into account.

Key words: Accretion discs, magnetorotational instability, diamagnetism.

1.Giriş

1990'lardan önce toplanma disklerinde moleküler viskozitenin dışarıya doğru açısall momentum taşınımını sağlamak için yeterli olmadığı anlaşılmıştır. Shakura & Sunyaev [1]

¹ Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, Bornova, 35100 İzmir
Tel: 0232 – 3884000 / 2328, Faks: 2323881036, e-posta: ebru.devlen@ege.edu.tr

² Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, Bornova, 35100 İzmir
Tel:0232 – 3884000 / 1737, Faks: 2323881036, e-posta: rennan.pekunlu@ege.edu.tr

Maxwell streslerinin toplanma disklerinde çalkantının başlamasına neden olabileceğini belirtmişlerdir.

Balbus & Hawley [2] “donmuşluk” koşulu altında zayıf bir manyetik alanın varlığında Kepler hız kesitine sahip toplanma disklerinin kararsız olduğunu göstermişlerdir. Eğer diskin manyetik alanı zayıfsa, yani altımsalsa, ortaya çıkan tedirginlikler kararsız biçimin büyümesine neden olur. “Yavaş biçim”, yerel olarak kararsız, yayılmayan (evanescent) ve diskin manyetik alan yapısından bağımsızdır. Manyetik alan yeğlinliği birkaç yörünge dönemi içinde 3-4 kat artmaktadır. Doğrusal olmayan yaklaşımlar kararsızlığın giderek çalkantıya dönüştüğünü ve dinamonun kurulduğunu göstermiştir [3][4][5][6]. Fiziksel olarak iyi belirlenmiş olan bu kararsızlığın, toplanma diskinde sahip tüm dizgelerde (Katakizmik Değişenler, Genç Yıldızimsı Nesnelere, Etkin Gökada Özekleri, vb.) ortaya çıkacağı savunulmuştur.

Wardle & Ng [7] iletkenlik tensöründe Hall teriminin önemini vurgulamışlardır. Daha sonra Balbus & Terquem (BT) [8] Genç Yıldızimsı Nesnelere çevresindeki toplanma disklerinde ortaya çıkan durgun yavaş dalgaların kararsızlığını Hall etkisinin varlığında incelediler. Bu etki, hız alanları nasıl olursa olsun, durgun yavaş dalgaların daima kararsız olacağına işaret etmiştir. Soğuk disklerde “donmuşluk” koşulunun diskin tümünde gerçekleşmeyeceği savunulabilir. Ancak, BT, elektronlarla iyonların indüktif eşleşmesi ve iyonlarla nötr parçacıkların da çarpışmalar yoluyla eşleşmeleri sonucunda disk akışkanının tümünün manyetik alanla etkileşim içinde olacağını savunmuşlardır.

“Donmuşluk” koşulu, Kepler hız kesitine sahip diskteki manyetik alan ile elektronların ortalama hızları arasında fark olmadığına işaret eder. Ancak, elektronlar manyetik alan kuvvet çizgileri çevresinde çember veya sarmal yörüngelerde dolmaktadır. Bu devinim yerel akımların ortaya çıkmasına neden olur. Yerel akımlar ortama diyamanyetizm sunar. Akımlar kapalı devrede dolaşacağından diskte yerel olarak akım bölgeleri ortaya çıkar. Bu akımların doğuracağı manyetik alanın yönünden ötürü, bu bölgelerin içindeki manyetik alan yeğlinliği dışındakine göre daha zayıf olacaktır. . Diyamanyetik etki, birim oylum içindeki manyetik moment, $\mu = mv_{\perp}^2 / 2B$, olarak tanımlanır. Tanımdan da görüleceği gibi, manyetik moment, B^{-1} ile orantılıdır. Manyetik-dönme kararsızlığının başlangıcı için bir ön koşul olan zayıf manyetik alan, diyamanyetik etki ile daha da zayıflatılmaktadır.

Bu çalışmanın 2. bölümünde kararsızlığın doğrusal analizi için gerekli olan fiziksel parametreleri ve temel denklemleri vereceğiz. 3. bölümde yerel akımların neden olduğu manyetik alan gradyentinin kararsızlık üzerindeki etkisini inceleyeceğiz. 4. bölümde ise bu çalışmanın sonuçları tartışılacaktır.

2. Genç Yıldızimsı Nesnelere Çevresindeki Diskler

2.1. Genel Özellikler

Minimum kütleli güneş bulutsusunu [9] model olarak alırsak yüzey yoğunluğu merkezdeki yıldızdan olan uzaklık (r) cinsinden şöyle verilir:

$$\sigma(r) = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 AB} \right)^{-3/2} gcm^{-3} \quad (1)$$

Diskten radyal yöndeki büyüklüğü $\sim 100 AB$ dir. Diskten dış bölgelerinin sıcaklığı $\sim 10 K$ iken iç bölgeler $\sim 1000 K$ sıcaklığına sahiptir. Denge sıcaklığı

$$T(r) = \left(\frac{L_*}{16\pi\sigma_{SB}r^2} \right)^{1/4} = 280 \left(\frac{r}{1 AB} \right)^{-1/2} \left(\frac{L_*}{L_{Sun}} \right)^{1/4} K \quad (2)$$

ile verilir. Burada L_* yıldız ışırtması, σ_{SB} Stefan-Boltzmann sabitidir. Buna göre ses hızı

$$c_s(r) = \left(\frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2} = 9.9 \times 10^4 \left(\frac{r}{1 AB} \right)^{-1/2} \left(\frac{L_*}{L_{Sun}} \right)^{1/8} \left(\frac{\mu}{2.34} \right)^{-1/2} \quad (3)$$

ile verilir. Burada μ ortalama molekül ağırlığıdır. Düşey doğrultuda hidrostatik denge varsayılırsa, orta düzlemdeki yoğunluk

$$\rho_c(r) = 1.4 \times 10^{-9} \left(\frac{r}{1 AB} \right)^{-11/4} \left(\frac{L_*}{L_{Sun}} \right)^{-1/8} \left(\frac{M_*}{M_{Sun}} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu}{2.34} \right)^{1/2} \text{ gcm}^{-3} \quad (4)$$

ile verilir. (3) ve (4) denklemleri kullanılarak plasma beta değeri manyetik alan yeğinliği ve yarıçapın bir fonksiyonu olarak bulunabilir.

$$\beta_c = \frac{2c_s^2}{\gamma v_{Ac}^2} = 2.1 \times 10^4 \left(\frac{r}{1 AB} \right)^{-13/4} \left(\frac{B_z}{0.1 G} \right)^{-2} \quad (5)$$

Burada B_z tekdüze dik alanın yeğinliğidir. Diferansiyel dönen ince Kepler diskinin hız kesiti

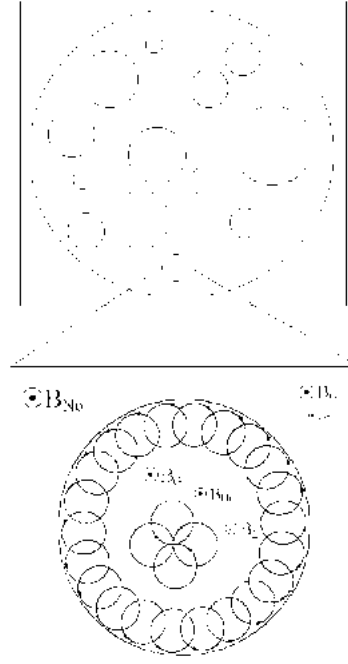
$$v_K^2 = \frac{GM}{R} \equiv R^2 \Omega^2 \quad (6)$$

ile verilir. Burada M merkezdeki yıldızın kütlesi, R yarıçap, Ω açısıl hız ve G evrensel çekim sabitidir.

Disk gazı elektronlar, iyonlar ve nötrleri içerir. Sadece elektronlar donmuşluk koşulunu sağlar. İyon ve elektron hızları arasındaki fark Hall elektromotif kuvveti doğurur, bu da whistler dalgalarını üretir.

2.2. Diyamanyetizm.

T Tauri disklerinin manyetik olarak etkin, etkin olmayan ve geçiş bölgesi olarak yapılandığı biliniyor [10][11][12]. Eğer etkin bölgenin varlığı için zaman ölçeği yeterince uzunsa yerel manyetizasyon akımları etkin ve etkin olmayan bölge arasında olan geçiş bölgesindeki akış üzerinde ortaya çıkar. Eğer akımlar durgunsa iyon veya nötrlerin veya her ikisinin çarpışmaları elektronların sarmal veya dairesel yörüngelerini ve yerel akımları tedirgin edecektir veya bozacaktır. Yerel akımların oluşumu Şekil 1 de gösterilmiştir. Disk, silindirik koordinatlarda z ye dik düzlemde uzanır. Disk içindeki daireler manyetik olarak etkin bölgeleri göstermektedir. Etkin ve etkin olmayan bölgeleri birleştiren geçiş bölgeleri yerel Larmor yarıçapı genişliğinde olsun. Altta şekil geçiş bölgesinde oluşan yerel akımın oluşum fiziğini göstermektedir.



Şekil1. Büyük daire manyetik olarak etkin olan bölgenin (adanın) sınırını göstermektedir. Küçük daireler elektronların yörüngeleridir. Global manyetik alana (B_G) zıt yönde bakan bir gözlemci için elektronların hareketi saat yönünün tersidir. B_L yerel manyetik alanı, B_M adanın içindeki net manyetik alanı, B_{N0} adanın dışındaki net manyetik alanı göstermektedir. Her bir elektron yörüngesi bir akım devresidir. Ada içinde komşu devrelerden gelen katkılar birbirini götüreceğinden net akım boşlanır. Bununla birlikte adanın sınırındaki akımlar birbirini destekler ve aynı gözlemci için yerel akımın yönü saat yönüdür. Böylece ortaya çıkan yerel manyetik alan, ada içinde dışarıya göre daha küçük bir manyetik alan oluşmasına neden olur.

Plazmaya donmuş olan elektronların yörüngeleri küçük daireler olarak gösterilmiştir. Daireler üzerindeki oklar (r, ϕ) düzleminde aşağıya bakan bir gözlemci için elektronların gyration hareketinin doğrultusunu gösterir. Her bir elektronun yörüngesi bir akım devresidir. Etkin bölgede net akım herhangi bir noktada ihmal edilir, çünkü komşu ilmiklerden gelen gelen katkılar birbirini götürür. Ancak geçiş bölgesinde akımlar birbirini destekler ve net bir akım oluşur. Oluşan bu yerel akım aynı gözlemci için saat yönündedir. Bu akımda sayfa düzleminde içe doğru yönelmiş bir manyetik alan üretir. Akım ve alan manyetizasyon ile ifade edilir:

$$\mathbf{J}_{mag} = c \nabla \times \mathbf{M} \quad (7)$$

$$\mathbf{M} = -\frac{2\mathbf{B}}{3B^2} W_k \quad (8)$$

W_k , elektronların kinetik enerji yoğunluğunun dik bileşenidir. Etkin bölge içinde net manyetik alan ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H} - \frac{8\pi}{3} W_k \frac{\mathbf{B}}{B^2} = \mathbf{H} - \frac{1}{3} \frac{W_k}{W_B} \mathbf{B} = \mathbf{H} - \varepsilon \mathbf{B} \quad (9)$$

\mathbf{B} etkin bölgedeki alan, \mathbf{H} yerel akımın yarattığı manyetik alandan etkilenmemiş alan, W_B manyetik alanın enerji yoğunluğudur. (9) denkleminin \mathbf{B} ile skaler çarparsak elde edilen

denklemin gerçel çözümünün olması için $\frac{4}{3}W_k \leq \frac{H^2}{8\pi}$ ve $\frac{H}{2} \leq B \leq H$ koşulları sağlanmalıdır.

Buradan

$$\frac{W_k}{W_B} \leq 3 \quad \text{veya} \quad \frac{(n_e/n_H)P}{B^2/8\pi} \leq 3 \quad \text{veya} \quad \frac{n_e}{n_H}\beta_c \leq 3 \quad (10)$$

elde edilir. (n_e/n_H) iyonlaşma kesri, P basınç, β_c (5) denklemleri ile verilen plazma beta değeridir. Bu diskler için, gözlenen ve/veya bulunan (n_e/n_H) ve B değerleri kullanılırsa (10) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

2.3. Temel MHD Denklemleri

MHD denklemleri ve Ampere yasası şöyle verilir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} \right) \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{mag} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} + c \nabla \times \mathbf{M} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - c \nabla \times \frac{2W_k}{3B^2} \mathbf{B} \\ &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{c}{4\pi} \frac{W_k}{3W_B} \nabla \times \mathbf{B} + \frac{c}{4\pi} \frac{2W_k}{3W_B} \frac{\nabla B}{B} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (15)$$

Eğer geçiş bölgesinde oluşan manyetik alan gradyenti ihmal edilirse (15) denklemindeki ∇B terimi düşer. Zayıf, tekdüze dik alan $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ile sınırlı diferansiyel dönen bir diskin yerel kararlılığını inceleyelim. Bu durumda momentum korunumu ve manyetik indüksiyon denklemleri

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - (1-\varepsilon) \frac{\nabla B^2}{8\pi} + (1-\varepsilon) \left(\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \cdot \nabla \right) \mathbf{B} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - (1-\varepsilon) \eta \nabla \times \mathbf{B} - (1-\varepsilon) \frac{c(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi en_e} \right) \quad (17)$$

ile verilir.

Elektriksel direnç ve Hall e.m.f. varlığında incelememizi düzlem dalga ve tedirginliklerin zaman değişiminin $e^{(ik_z \hat{z} + \omega t)}$ biçiminde olduğu varsayımıyla yapalım. Bu varsayım dağılma bağıntısının katsayılarını gerçel yapar. Boussinesq limitinde ve başlangıç noktası diskin özeğinde olan silindirik konsayılarda (R, ϕ, z) çalışalım. Bu durumda basınç, yoğunluk hızın ve manyetik alanın dik yöndeki bileşenlerinin tedirginlikleri sıfır olur. (11), (16) ve (17) eşitlikler dizgesini doğrusallaştırsak dağılma bağıntısını elde ederiz:

$$\omega^4 + 2k^2\eta(1-\varepsilon)\omega^3 + A_2\omega^2 + 2k^2\eta\left[\kappa^2(1-\varepsilon) + k^2v_A^2(1-\varepsilon)^2\right]\omega + A_0 = 0 \quad (18)$$

A_2 ve A_0 katsayıları:

$$A_2 = \left[\kappa^2 + k^4\eta^2(1-\varepsilon)^2 + 2k^2v_A^2(1-\varepsilon) + \left(\frac{d\Omega^2}{d\ln R} + k^2v_H^2(1-\varepsilon) \right) \frac{k^2v_H^2}{4\Omega^2}(1-\varepsilon) \right] \quad (19)$$

$$A_0 = \left[\kappa^2 \frac{k^2v_H^2}{4\Omega^2} + k^2v_A^2 \right] \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln R}(1-\varepsilon) + k^2v_H^2(1-\varepsilon)^2 + k^2v_A^2(1-\varepsilon)^2 \right] + \kappa^2k^4\eta^2(1-\varepsilon)^2 \quad (20)$$

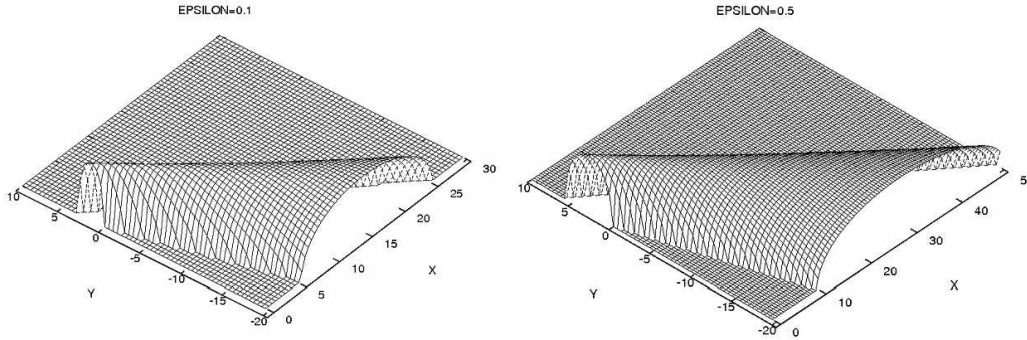
$\kappa^2 = 4\Omega^2 + d\Omega^2/d\ln R$ epicyclic frekans, $v_H^2 = \Omega Bc/2\pi en_e$ Hall parametresidir.

$\eta = 0$ koşulu altında (18) dağılma bağıntısını boyutsuz parametreler cinsinden yazalım.

$$s^4 + \left\{ \tilde{\kappa}^2 + 2X(1-\varepsilon)^2 + \left[\frac{d\ln\Omega^2}{d\ln R} + Y(1-\varepsilon) \right] \frac{Y}{4}(1-\varepsilon) \right\} s^2 + \left[\tilde{\kappa}^2 \frac{Y}{4}(1-\varepsilon) + X(1-\varepsilon)^2 \right] \left[\frac{d\ln\Omega^2}{d\ln R} + Y(1-\varepsilon) + X(1-\varepsilon)^2 \right] = 0 \quad (21)$$

$s = \omega/\Omega$, $X = (kv_A/\Omega)^2$, $Y = (kv_H/\Omega)^2$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\Omega$ dır.

(21) numaralı dağılma bağıntısının çözümü Şekil 2 de görülmektedir.



Şekil 2. Elektriksel direncin sıfır olduğu durumda büyüme oranının (X, Y) düzlemindeki görünümü. Yükseltinin maksimum büyüme oranı 0.75Ω dır.

4. Genel Eksensimetrik Tedirginlikler

Geçiş bölgesinde yerel akımların kuvvetli olması halinde (15) denkleminde ∇B terimi de dikkate alınmalıdır. Denge durumunda manyetik alanın R doğrultusunda değiştiğini, yani $\mathbf{B} = B(R)\hat{z}$ varsayalım. (12) denklemine göre genel denge koşulu

$$\Omega^2 R = \frac{v_\phi^2}{R} = \frac{1}{4\pi\rho} B \nabla B (1 + \varepsilon) \quad (22)$$

ile verilir. Bu durumda dışa doğru olan merkezkaç kuvveti sadece içe doğru olan (yerel akımların neden olduğu manyetik alan gradyentinin yönü dışa doğru olduğu için) manyetik basınç kuvveti dengeler. Eksensimetrik tedirginliklerin uzay ve zaman değişimi $e^{(ik_R \hat{R} + ik_z \hat{z} + \omega t)}$ biçiminde olsun. Bu durumda doğrusallaştırılmış MHD denklemleri:

$$k_R \delta v_R + k_z \delta v_z = 0 \quad (23)$$

$$\omega \delta v_R - 2\Omega \delta v_\phi + ik_R \frac{\delta P}{\rho} - (1 - \varepsilon) \frac{ik_z B_z}{4\pi\rho} \delta B_R + \frac{1}{4\pi\rho} \left[\nabla B (4 + 2\varepsilon) + B_z ik_R (1 + \varepsilon) \right] \delta B_z = 0 \quad (24)$$

$$\omega \delta v_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta v_R - \frac{ik_z B_z}{4\pi\rho} \delta B_\phi (1 - \varepsilon) = 0 \quad (25)$$

$$\omega \delta v_z + ik_z \frac{\delta P}{\rho} - (1 + \varepsilon) \frac{\nabla B}{4\pi\rho} \delta B_R = 0 \quad (26)$$

$$\left[\omega + (1 - \varepsilon) k^2 \eta \right] \delta B_R - ik_z B_z \delta v_R + (1 - \varepsilon) \frac{k_z^2 B_z c}{4\pi e n_e} \delta B_\phi - \eta \left[2\varepsilon ik_z \frac{\nabla B}{B} + 2\varepsilon k_R k_z \right] \delta B_z = 0 \quad (27)$$

$$\left[\omega + (1 - \varepsilon) k^2 \eta - 4\varepsilon \eta ik_R \frac{\nabla B}{B} + 6\varepsilon \eta \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 - 2\varepsilon \eta \frac{\nabla^2 B}{B} \right] \delta B_\phi - ik_z B_z \delta v_\phi - \left[\frac{d\Omega}{d \ln R} + \frac{c}{4\pi e n_e} \left[(1 - \varepsilon) k_z^2 B_z + (1 + \varepsilon) ik_R \nabla B + \nabla^2 B (1 + \varepsilon) - 2\varepsilon \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 \right] \right] \delta B_R + \frac{c}{4\pi e n_e} \left[-(1 - \varepsilon) ik_z \nabla B + k_R k_z B_z (1 + \varepsilon) \right] \delta B_z = 0 \quad (28)$$

$$\left[\omega + (1 - \varepsilon) k^2 \eta + 4\varepsilon \eta ik_R \frac{\nabla B}{B} + 2\varepsilon \eta \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 - (4 + 2\varepsilon) \eta \frac{\nabla^2 B}{B} + 2\varepsilon \eta k_R^2 \right] \delta B_z - ik_z B_z \delta v_z + \delta v_R \nabla B + 2\varepsilon \eta ik_z \frac{\nabla B}{B} \delta B_R + \frac{c}{4\pi e n_e} \left[(1 + \varepsilon) ik_z \nabla B - k_R k_z B_z (1 - \varepsilon) \right] \delta B_\phi = 0 \quad (29)$$

(23)-(29) denklemlerinin çözümünden beşinci dereceden imajiner katsayılı dağılma bağıntısı elde edilir:

$$\omega^5 + a_4\omega^4 + a_3\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = 0 \quad (30)$$

Katsayılar EK-A da verilmiştir. (30) denklemini Genç Yıldızlımsı Nesnelere etrafındaki diklerde düşük frekanslı beş biçemi tanımlar. (30) denkleminin köklerinden en az birinin pozitif gerçel kısma (kararsız biçem) sahip olma koşulu aşağıdaki eşitsizlikler ile verilir [13][14]:

$$\begin{aligned} a_4 &< 0, \\ a_0 &< 0, \\ A_1 &\equiv a_4a_3 - a_2 < 0, \\ A_2 &\equiv a_2(a_4a_3 - a_2) - a_4(a_4a_1 - a_0) < 0, \\ A_3 &\equiv (a_4a_1 - a_0)[a_2(a_4a_3 - a_2) - a_4(a_4a_1 - a_0)] - a_0(a_4a_3 - a_2)^2 < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Bu koşullar gelecek çalışmada incelenecektir.

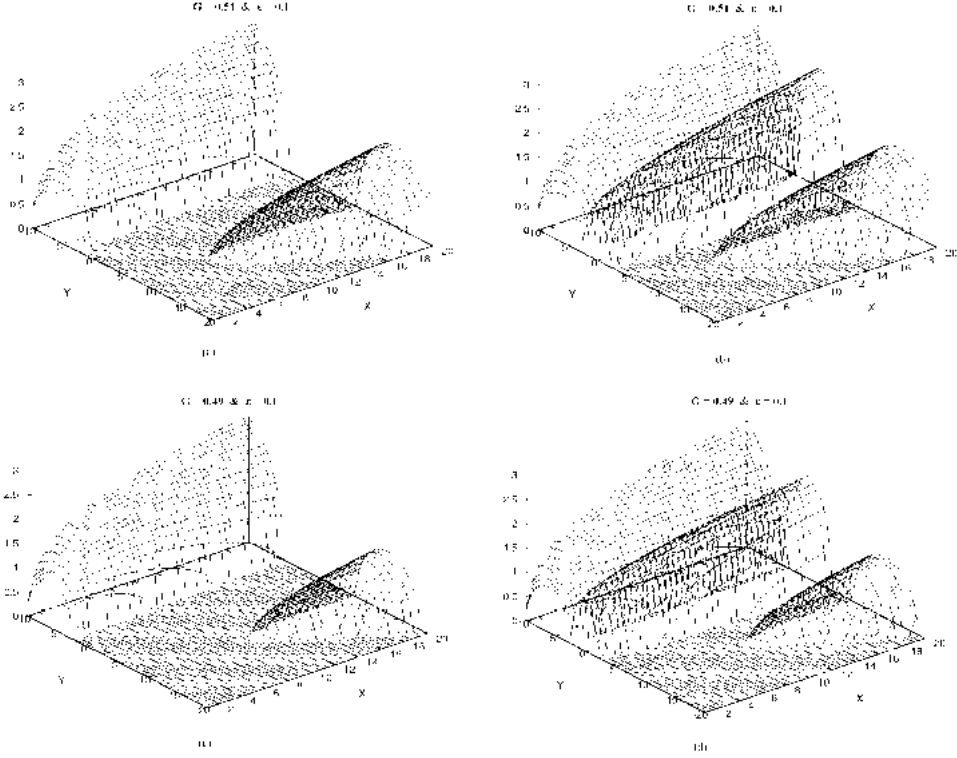
$\eta = 0$ koşulu altında, kararsızlık koşulu $a_1 < 0$ ile verilir. İhmal edilemeyen k_R tedirginliklerinin manyetik basınç tarafından bastırılmasından ötürü $k_R - k_z$ düzleminde maksimum büyüme oranının $k_R = 0$ ekseninde olduğunu varsayarak (30) dağılma bağıntısını boyutsuz parametreler cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} s^4 + \left[G^2 \left(-\frac{Y^2}{2} \varepsilon(1-\varepsilon) - 2X(2+\varepsilon) \right) + \tilde{\kappa}^2 + 2X(1-\varepsilon)^2 + \left(\frac{d \ln \Omega^2}{d \ln R} + Y(1-\varepsilon) \right) \frac{Y}{4}(1-\varepsilon) \right] s^2 \\ + G^4 XY^2 \varepsilon(1-\varepsilon)(2+\varepsilon) + G^2 \left[\tilde{\kappa}^2 \frac{Y^2}{2} \varepsilon(1-\varepsilon) - 2X^2(1-\varepsilon)(2+\varepsilon) + XY \frac{d \ln \Omega^2}{d \ln R} \varepsilon(2+\varepsilon) \right. \\ \left. + 3X \frac{Y^2}{2} (1-\varepsilon^2) - \tilde{\kappa}^2 X \frac{Y}{2} (1-\varepsilon)(2+\varepsilon) \right] \\ + \left[\tilde{\kappa}^2 \frac{Y}{4} (1-\varepsilon) + X(1-\varepsilon)^2 \right] \left[\frac{d \ln \Omega^2}{d \ln R} + Y(1-\varepsilon) + X(1-\varepsilon)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Burada $s = \omega/\Omega$, $X = (kv_A/\Omega)^2$, $Y = (kv_H/\Omega)^2$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\Omega$, $G = (1/k)(\nabla B/B)$ dir.

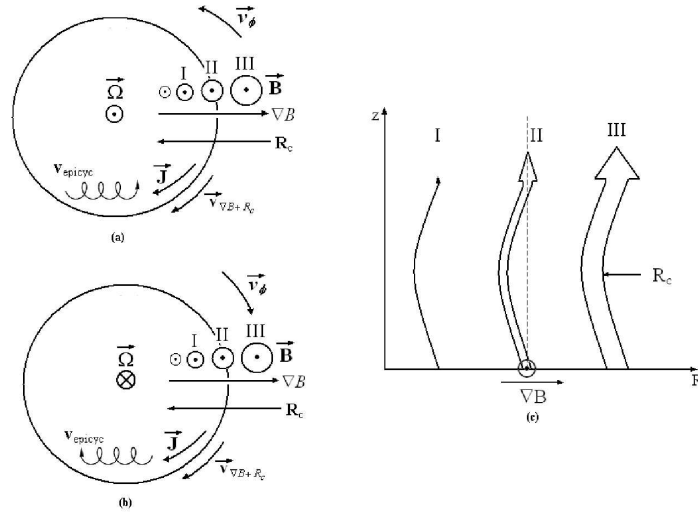
(32) denkleminin grafik çözümleri Şekil 3 de verilmiştir.

Şekil (2) ve (3) ü karşılaştırdığımızda *i*) maksimum büyüme oranının yerel Oort-A değerinin yaklaşık 4 katı olduğu görülür, *ii*) ∇B yokluğunda köklerden biri kararsız ve tek kararsızlık alanı varken, bu terimin eklenmesi ile iki kök kararsız olmakta ve ilk kök için iki kararsızlık alanı varken, ikinci kararsız kök için üç tane kararsızlık alanı vardır, *iii*) hem epsilon hem de alan gradyenti değeri küçüldükçe Y nin negatif değerlerindeki (yani, $\Omega \uparrow \downarrow B$ durumunda) kararsızlık alanı daralır.



Şekil 3. (a) ve (c) (32) denkleminin birinci kökleri, (b) ve (d) ikinci köklerdir. ∇B nin etkisini görmek için epsilon değeri sabit alınmıştır.

Şimdi bunun altında yatan fiziğe bir göz atalım. Şekil 4a ve 4b de daire yerel kartezyen koordinat sisteminin orijininin R_0 yarıçapı civarında yerel akım devresini (daresi) gösterebiliriz. Manyetik alan sayfa düzleminden dışarı doğru olsun. $\Omega \parallel \mathbf{B}$ durumuna bakalım. Bu yerel akım diyamanyetik etki nedeniyle manyetik alan gradyenti yaratır. Manyetik alanın yeğinliği daire içinde dışarıdaki alandan daha zayıf olacaktır. Bu sınır çizgisi olayı olmasına karşın, uzunluk ölçeği yerel Larmor yarıçapının iki katı denlidir, bu da kararsızlığı başlatmak için gerekli olan tedirginlikleri tetikleyebilir. Manyetik alan gradyenti $-\hat{\mathbf{R}}$ doğrultusunda parçacıkları iten bir manyetik basınç kuvveti ortaya çıkarır. Manyetik alana donmuş olan elektronlar alan çizgilerini bükecektir. Eğrilik yarıçapı doğrultusundaki birim vektör $-\hat{\mathbf{R}}$ doğrultusundadır. Eğer alan gradyenti ve alan çizgilerinin eğriliği yeterince uzun sürüyorsa elektronlar bir kayma (drift) hızı $\mathbf{v}_{\nabla B, R_c} \propto (1/q) \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}$ kazanacaktır. Bu, kararlı kılıcı olan Coriolis kuvvetinin neden olduğu harekete ters yöndedir (Şekil 5a). Bu yerel akımların neden olduğu kararsız kılıcı hareketler sağ el kuralına göre alan çizgilerinin whistler dairesel hareketiyle aynı yönlüdür. Whistler dalgalarına benzer manyetik alan gradyenti ve eğriliğinin etkisi altında elektronların kayması hızla tepki olarak bir dairesel uçlanmış bileşen sunacaktır. Bu tepki, dinamik epicyclic hareketi bastırırken Coriolis kuvveti azalır. Bu durum $\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B}$ durumunda tersine döner (Şekil 4b).



Şekil 4. Yerel akım diyamanyetik etki nedeniyle manyetik alan gradyenti yaratır. Manyetik alan gradyenti $-\hat{\mathbf{R}}$ doğrultusunda parçacıkları iten bir manyetik basınç kuvveti ortaya çıkarır. Manyetik alana donmuş olan elektronlar alan çizgilerini bükecektir. Eğrilik yarıçapı doğrultusundaki birim vektör $-\hat{\mathbf{R}}$ doğrultusundadır. Eğer alan gradyenti ve alan çizgilerinin eğriliği yeterince uzun sürüyorsa elektronlar bir kayma (drift) hızı $\mathbf{v}_{\nabla B+R_c} \propto (1/q)\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}$ kazanacaktır.

Burada $\mathbf{v}_{\nabla B+R_c} \propto (1/q)\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}$ hızıyla kayan elektronların neden olduğu drift akımını ihmal edebilir miyiz? Bunu bulmak için $\mathbf{J}_{mag}/\mathbf{J}_{drift}$ oranını bulalım. (15) denkleminde tanımlanmış olan \mathbf{J}_{mag} ifadesinin ∇B içeren ikinci terimini $(c/4\pi)(2W_k/3W_B)(\nabla B/B) \times \mathbf{B}$ alalım. Drift akımı $\mathbf{J}_{drift} = (cW_k/B^3)[(\hat{\mathbf{b}} \times \nabla)(B^2/2)]$ ile ifade edilir. $\hat{\mathbf{b}}$ dik B manyetik alanı ile aynı yöndedir. ∇B ve ∇B^2 nin ölçek uzunlukları eşitse, $\mathbf{J}_{mag}/\mathbf{J}_{drift}$ oranı 8/3 bulunur. Bu da \mathbf{J}_{mag} in \mathbf{J}_{drift} den yaklaşık 3 kat denli büyük olduğunu gösterir.

5. Sonuç

Yerel akımlar sonucu zayıflatılmış manyetik alan, kararsız biçim için kritik dalgasayısını daha büyük değerlere götürür. Kararsızlık alanı genişler. Balbus & Hawley [3] zayıf manyetik alan varlığında Kepler disklerinin kararsız olduğunu göstermiştir ve kararsızlığın maksimum büyüme oranını 0.75Ω bulmuşlardır. Bunun bir üst sınır olduğunu ifade etmekle birlikte bu değerın aşılabileceğini belirtmişlerdir. Biz bu çalışmada yerel akımların neden olduğu manyetik alan gradyentini dikkate aldığımızda maksimum büyüme oranının Oort-A değerinden yaklaşık 4 kat daha büyük olduğunu bulduk. Ayrıca alan gradyenti dikkate alınmadığında Hall etkisi ve diyamanyetizm $\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B}$ durumunda kararsızlığı desteklerken $\mathbf{B} \uparrow \uparrow \Omega$ için kararsızlığı bastırma eğilimindedir. Ancak alan gradyenti dikkate alındığında her iki durum için, iki biçim de kararsızdır. Gradyent ve manyetizasyon değerinin küçülmesiyle $\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B}$ durumunda kararsızlık alanı daralır. Tüm bunlar gösteriyor ki, zayıf manyetik alanı daha da zayıflatan yerel akımlar, Genç Yıldızimsı Nesnelere etrafındaki toplanma disklerini kararsız kılar ve kararsızlığın büyüme oranı da oldukça büyüktür. Bu kararsızlığın çalkantıya dönüşüp dönüşmediğini doğrusal olmayan çözümler söyler.

Kaynaklar

- [1] Shakura, N.I. & Sunyaev, R.A. (1973), “Black holes in binary systems. Observational appearance.” *Astronomy & Astrophysics*, 24, 337
- [2] Balbus, S.A. & Hawley, J.F. (1991), “A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis.” *Astrophysical Journal*, 376, 214
- [3] Balbus, S.A. & Hawley, J.F. (1992), “Is the Oort A-value a universal growth rate limit for accretion disk shear instabilities?” *Astrophysical Journal*, 392, 662
- [4] Balbus, S.A. & Hawley, J.F. (1992), “A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. IV. Nonaxisymmetric Perturbations” *Astrophysical Journal* 400, 610
- [5] Balbus, S.A., Hawley, J.F. & Stone, J.M. (1996), “Nonlinear Stability, Hydrodynamical Turbulence, and Transport in Disks” *Astrophysical Journal* 467, 76
- [6] Stone, J.M., Hawley, J.F., Gammie, C.F. & Balbus, S.A. (1996), “Three-dimensional Magnetohydrodynamical Simulations of Vertically Stratified Accretion Disks” *Astrophysical Journal* 463, 656
- [7] Wardle, M. & Ng, C. (1999), “The conductivity of dense molecular gas” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 303, 239
- [8] Balbus, S.A. & Terquem, C. (2001), “Linear Analysis of the Hall Effect in Protostellar Disks” *Astrophysical Journal*, 552, 235
- [9] Sano, T. & Miyama, S. M., (1999), “Magnetorotational Instability In Protoplanetary Disks. I. On The Global Stability of Weakly Ionized Disks with Ohmic Dissipation” *Astrophysical Journal*, 515,776
- [10] Gammie, C. F. (1996), “Layered Accretion in T Tauri Disks” *Astrophysical Journal*, 457, 355
- [11] Ilgner, M. & Nelson, R. P. (2006), “On the ionisation fraction in protoplanetary disks. II. The effect of turbulent mixing on gas-phase chemistry” *Astronomy & Astrophysics* , 445,223
- [12] Balbus, S. A. (2003), “Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks” *Annual Review Astronomy & Astrophysics*, 41, 555
- [13] DiStefano III, J. J., Stubberud, A. R., Williams, I. J., (1967), “Schaum’s Outline of Feedback and Control Systems” McGraw-Hill Book Company
- [14] Giaretta, D. L. (1979), “Polynomial dispersion relations” *Astronomy & Astrophysics*, 75, 273

EK-A

$$a_4 = \left[3k^2\eta(1-\varepsilon) + 2\varepsilon\eta k_R^2 - \left(\frac{\nabla B}{B}\right)^2 4\eta(1-\varepsilon) \right]$$

$$a_3 = -\left(\frac{\nabla B}{B}\right)^4 16\varepsilon\eta^2 + i\left(\frac{\nabla B}{B}\right)^3 16\varepsilon\eta^2 k_R(1+\varepsilon) + \left(\frac{\nabla B}{B}\right)^2 \left[-8k^2\eta^2(1-\varepsilon)^2 - \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_z^2 2\varepsilon(1-\varepsilon) \right. \\ \left. + 24\varepsilon^2\eta^2 k_R^2 - 4\varepsilon^2\eta^2 k_z^2 - 2v_A^2 \frac{k_z^2}{k^2} (2+\varepsilon) \right]$$

$$+ i\left(\frac{\nabla B}{B}\right) \left[-8\varepsilon^2\eta^2 k_R^3 + 4k_R k_z^2 \varepsilon^2 \eta^2 - \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_z^2 k_R (1+\varepsilon^2) - 2v_A^2 \frac{k_z^2}{k^2} (2+\varepsilon) k_R \right]$$

$$+ \left[\frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_z^2 \left[k_R^2 (1-\varepsilon^2) + k_z^2 (1-\varepsilon)^2 \right] + \frac{v_H^2}{4\Omega^2} k_z^2 (1-\varepsilon) \frac{d\Omega^2}{d\ln R} + \kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} - 2\varepsilon v_A^2 \frac{k_z^4}{k^2} + 2k_z^2 v_A^2 \right. \\ \left. + 3k^4 \eta^2 (1-\varepsilon)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^4 \left[-8 \frac{k_z^2}{k^2} v_A^2 \eta \varepsilon (2 + \varepsilon) - 16 k^2 \eta^3 \varepsilon (1 - \varepsilon) - 16 k_z^2 \varepsilon^3 \eta^3 + 2 \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_z^2 \eta (-2 + 3 \varepsilon - 2 \varepsilon^2 + \varepsilon^3) \right] \\
& + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^3 \left[-2 \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R k_z^2 \eta (2 - \varepsilon + 2 \varepsilon^2 + \varepsilon^3) + 32 k_R k_z^2 \varepsilon^3 \eta^3 - \eta k_R \frac{k_z^2}{k^2} v_A^2 (2 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) \right. \\
& \left. + 16 \varepsilon k^2 \eta^3 k_R (1 - \varepsilon^2) \right] \\
& + \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 \left[-\frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_z^4 2 \eta (2 - 3 \varepsilon + \varepsilon^3) - \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_z^2 k^2 \eta 2 \varepsilon (1 - \varepsilon)^2 - 2 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 \eta (4 - 9 \varepsilon - \varepsilon^2) \right. \\
& - 4 k^4 \eta^3 (1 - \varepsilon)^3 - \frac{v_H^2}{4 \Omega^2} k_z^2 (2 - \varepsilon + \varepsilon^2) \eta \frac{d \Omega^2}{d \ln R} - k_R^2 \frac{k_z^2}{k^2} 4 v_A^2 \eta (1 + 3 \varepsilon + 2 \varepsilon^2) \\
& + 24 k^2 \eta^3 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) k_R^2 - \kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} 4 \eta (1 - \varepsilon) + 2 \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R^2 k_z^2 \eta \varepsilon (1 - \varepsilon) (1 + 3 \varepsilon) + 16 k_R^2 k_z^2 \varepsilon^3 \eta^3 \\
& - 4 k_z^2 k^2 \eta^3 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) + 2 \frac{k_z^6}{k^2} \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} \varepsilon \eta (1 - \varepsilon) (1 - 3 \varepsilon) - k_z^2 4 v_A^2 \eta (2 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) \\
& \left. - 4 \frac{k_z^4}{k^2} \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R^2 \eta \varepsilon (1 + 4 \varepsilon - 3 \varepsilon^2) + 2 \frac{k_z^2}{k^2} \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R^4 \eta \varepsilon (-3 - 4 \varepsilon + 3 \varepsilon^2) \right] \\
& + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right) \left[\frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R k_z^4 4 \eta \varepsilon (1 - \varepsilon) (2 + \varepsilon) + \frac{v_H^2}{4 \Omega^2} k_z^2 k_R 4 \eta \frac{d \Omega^2}{d \ln R} \varepsilon - \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_R k_z^2 k^2 \eta (1 - \varepsilon) (1 + 3 \varepsilon^2) \right. \\
& - 8 k_R^3 k^2 \eta^3 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) + 4 k^2 \eta^3 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) k_z^2 k_R - \frac{k_z^2}{k^2} k_R^3 8 v_A^2 \eta \varepsilon^2 - k_z^2 k_R 4 v_A^2 \eta (2 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) \\
& \left. - \frac{k_z^4}{k^2} k_R 2 v_A^2 \eta \varepsilon (-3 + \varepsilon) + 2 k_R^2 k^4 \eta^3 \varepsilon (1 - \varepsilon)^2 \right] \\
& + \left[k^6 \eta^3 (1 - \varepsilon)^3 + \frac{v_H^4}{4 \Omega^2} k_z^2 k^2 \eta (1 - \varepsilon) \left[k_R^2 (1 - \varepsilon^2) + k_z^2 (1 - \varepsilon)^2 \right] + \frac{v_H^2}{4 \Omega^2} k_z^2 (1 - \varepsilon)^2 k^2 \eta \frac{d \Omega}{d \ln R} \right. \\
& \left. + \kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} 2 \varepsilon \eta k_R^2 + 3 k_z^2 k^2 \eta (1 - \varepsilon) + 2 \eta k_z^2 v_A^2 (1 - \varepsilon) (2 + \varepsilon) k_R^2 + 4 \eta k_z^4 v_A^2 (1 - \varepsilon)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 = & -i \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^5 \frac{k_z^2}{k^2} v_A^2 k_R^2 8\varepsilon \eta^2 (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) \\
 & + \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^4 \left[-16\kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} \eta^2 \varepsilon - 8 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 \varepsilon \eta^2 (2 + \varepsilon)(1 - 3\varepsilon) - 8v_A^2 k_z^2 8\varepsilon \eta^2 (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) \right. \\
 & \left. + v_A^2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} 4\varepsilon (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) - 8 \frac{k_z^2}{k^2} k_R^2 v_A^2 \varepsilon \eta^2 (1 + \varepsilon)(2 + 3\varepsilon) \right] \\
 & + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^3 \left[v_A^2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R \frac{k_z^4}{k^2} 4\varepsilon (1 + \varepsilon)(2 + \varepsilon) + 16\kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} k_R \varepsilon \eta^2 (1 + \varepsilon) - 2\eta^2 k_R k_z^2 v_A^2 (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \right. \\
 & \left. - 16 \frac{k_z^4}{k^2} k_R v_A^2 \varepsilon \eta^2 (2\varepsilon - 1)(1 + \varepsilon) + 16\eta^2 k_R^3 \frac{k_z^2}{k^2} v_A^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon) \right] \\
 & + \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 \varepsilon \left[-8\eta^2 (1 - \varepsilon)^2 k_z^2 \kappa^2 - 2k^2 \eta^2 k_z^2 v_A^2 (4 - 5\varepsilon + \varepsilon^3) + 2\eta^2 k_z^4 v_A^2 (1 - \varepsilon)(-2 + 9\varepsilon + \varepsilon^2) \right. \\
 & + 24\kappa^2 \frac{k_z^2}{k^2} k_R^2 \varepsilon^2 \eta^2 - 2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \kappa^2 \frac{k_z^4}{k^2} \varepsilon (1 - \varepsilon) + 4 \frac{k_z^4}{k^2} k_R^2 v_A^2 \varepsilon^2 \eta^2 (5 - \varepsilon) - \kappa^2 \frac{k_z^4}{k^2} \varepsilon^2 \eta^2 \\
 & + 4 \frac{v_H^2}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \varepsilon (2 + \varepsilon) + 6 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 \varepsilon (1 - \varepsilon^2) - 4 \frac{k_z^6}{k^2} v_A^2 \varepsilon^2 \eta^2 (1 - \varepsilon) \\
 & \left. - 4\varepsilon (1 - \varepsilon)(2\varepsilon + 3)\eta^2 k_R^2 k_z^2 v_A^2 - 2 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 v_H^2 \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} (2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon) - 2 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^4 (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) \right] \\
 & + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right) \left[-\frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R \kappa^2 \frac{k_z^4}{k^2} (1 + 3\varepsilon^2) + 2 \frac{v_H^2}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 k_R \frac{d\Omega}{d \ln R} \varepsilon (1 + \varepsilon) - 4 \frac{k_z^4}{k^2} k_R v_A^2 v_H^2 \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} \right. \\
 & - 6\eta^2 k_R k_z^4 (1 - \varepsilon)^2 \varepsilon v_A^2 - 8\kappa^2 k_R^3 \frac{k_z^2}{k^2} \varepsilon^2 \eta^2 - 8\varepsilon^2 (1 - \varepsilon)\eta^2 k_R^3 k_z^2 v_A^2 - 4\kappa^2 k_R \frac{k_z^4}{k^2} \varepsilon^2 \eta \\
 & \left. - 2 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^4 k_R (2 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 - k_R \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 v_H^2 (1 - \varepsilon)^2 - 2k^2 \eta^2 k_R k_z^2 v_A^2 (2 - 3\varepsilon + \varepsilon^3) \right] \\
 & + \left[3k^2 \eta^2 \kappa^2 k_z^2 (1 - \varepsilon)^2 + 4\varepsilon \eta^2 (1 - \varepsilon) k_R^2 k_z^2 \kappa^2 + \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \kappa^2 \frac{k_z^4}{k^2} [k_R^2 (1 - \varepsilon^2) + k_z^2 (1 - \varepsilon)^2] \right. \\
 & + \frac{v_H^2}{4\Omega^2} \kappa^2 \frac{k_z^4}{k^2} (1 - \varepsilon) \frac{d\Omega}{d \ln R} + 2k^2 \eta^2 k_z^2 v_A^2 (1 - \varepsilon) [k_R^2 (1 - \varepsilon^2) + k_z^2 (1 - \varepsilon)^2] \\
 & + \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 v_H^2 [k_R^2 (1 - \varepsilon^2) + k_z^2 (1 - \varepsilon)^2] + \frac{k_z^4}{k^2} (1 - \varepsilon) v_A^2 \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \\
 & \left. + \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 v_H^2 \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} [k_R^2 (1 - \varepsilon^2) + k_z^2 (1 - \varepsilon)^2] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 = & \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^4 \left[\begin{aligned} & -4\eta^3 \kappa^2 k_z^2 \varepsilon (1-\varepsilon) (4+3\varepsilon^2) - 2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} \eta \kappa^2 (2-3\varepsilon+2\varepsilon_2-\varepsilon^3) \\ & -2(1-\varepsilon)^2 (2+\varepsilon) v_A^2 v_H^2 k_z^4 \eta - 16 \frac{k_z^4}{k^2} \eta^3 \kappa^2 \varepsilon^3 \end{aligned} \right] \\
 & + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^3 \left[\begin{aligned} & -2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R \frac{k_z^4}{k^2} \eta \kappa^2 (2-\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^3) + 16\eta^3 \kappa^2 k_R k_z^2 \varepsilon (1-\varepsilon^2) + 32 \frac{k_z^4}{k^2} k_R \eta^3 \kappa^2 \varepsilon^3 \\ & -2 \frac{k_z^4}{k^2} \eta v_A^4 k_R (1-\varepsilon^2) (2+\varepsilon) - 2\eta v_A^2 v_H^2 k_R \frac{k_z^4}{k^2} (1-\varepsilon) (2+\varepsilon+3\varepsilon^2) \\ & -2\eta v_A^2 v_H^2 k_R \frac{k_z^4}{k^2} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} (1+\varepsilon) (2-\varepsilon+\varepsilon^2) \end{aligned} \right] \\
 & + \left(\frac{\nabla B}{B} \right)^2 \left[\begin{aligned} & -2\eta \frac{v_H^2}{4\Omega^2} \frac{d\Omega^2}{d \ln R} \frac{k_z^4}{k^2} \kappa^2 (2-\varepsilon+\varepsilon^2) - 2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_z^4 \varepsilon (1-\varepsilon)^2 \kappa^2 \eta - 2 \frac{k_z^4}{k^2} v_A^2 \eta \frac{d\Omega}{d \ln R} (1-\varepsilon) (2+\varepsilon) \\ & + \eta v_A^2 v_H^2 \frac{k_z^6}{k^2} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} (-2+7\varepsilon-4\varepsilon^2-\varepsilon^3) - 4\eta v_A^2 v_H^2 \frac{k_z^6}{k^2} (1-\varepsilon)^2 - 4k^2 \eta^3 (1-\varepsilon)^3 \kappa^2 k_z^2 \\ & + 4 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \frac{k_z^6}{k^2} \eta \kappa^2 (-1+2\varepsilon-2\varepsilon^2+\varepsilon^3) + 2 \frac{k_z^6}{k^2} \eta v_A^4 (-2+7\varepsilon-2\varepsilon^2-3\varepsilon^3) \\ & -4 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} \frac{k_z^4}{k^2} k_R^2 \eta \kappa^2 \varepsilon (1+\varepsilon) - 4\eta v_A^2 v_H^2 k_R^2 \frac{k_z^4}{k^2} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} \varepsilon (1+\varepsilon) + 2\eta k_z^4 v_A^4 (-2+3\varepsilon-\varepsilon^3) \\ & -4 \frac{k_z^4}{k^2} \eta v_A^4 k_R^2 \varepsilon (1-\varepsilon^2) + 16 \frac{k_z^4}{k^2} k_R^2 \eta^3 \kappa^2 \varepsilon^3 - 4\eta v_A^2 v_H^2 k_R^2 \frac{k_z^4}{k^2} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \\ & -2 \frac{v_H^2}{4\Omega^2} v_A^2 k_z^4 \eta \kappa^2 (1-\varepsilon) (2+\varepsilon) - 4k^2 \eta^3 \varepsilon^2 (1-\varepsilon) \kappa^2 k_z^2 + 28k_R^2 \eta^3 \kappa^2 k_z^2 \varepsilon^2 (1-\varepsilon) \end{aligned} \right] \\
 & + i \left(\frac{\nabla B}{B} \right) \left[\begin{aligned} & 2 \frac{v_H^2}{4\Omega^2} v_A^2 k_R \frac{k_z^6}{k^2} \eta \kappa^2 \varepsilon (1-\varepsilon) (3+\varepsilon) + 2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R \frac{k_z^6}{k^2} \eta \kappa^2 \varepsilon (1-\varepsilon) (3+\varepsilon) - 8\eta^3 k_R^3 \kappa^2 k_z^2 \varepsilon^2 (1-\varepsilon) \\ & + \eta \frac{v_H^2}{4\Omega^2} \frac{d\Omega^2}{d \ln R} k_R k_z^4 \kappa^2 4\varepsilon - 2\eta k_R k_z^4 v_A^4 (-2+3\varepsilon-\varepsilon^3) - \eta (1-\varepsilon)^3 k_R k_z^4 v_A^2 v_H^2 \\ & - \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R k_z^4 \eta \kappa^2 (1-\varepsilon)^3 - 4\eta \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} (1-\varepsilon) v_A^2 v_H^2 k_R k_z^4 + 4\eta^2 k_R \kappa^2 k_z^4 \varepsilon^2 (1-\varepsilon) \\ & -2 \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_R k_z^4 \kappa^2 \eta \varepsilon (1-\varepsilon^2) + 4\varepsilon \eta v_A^2 k_R \frac{k_z^4}{k^2} \frac{d\Omega^2}{d \ln R} (1-\varepsilon) - 2 \frac{k_z^6}{k^2} \eta v_A^4 k_R \varepsilon (1-\varepsilon) (\varepsilon-3) \\ & -2\eta v_A^2 v_H^2 k_R \frac{k_z^6}{k^2} \varepsilon (1-\varepsilon) (\varepsilon-3) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[2\epsilon k^2 \eta^3 (1-\epsilon)^2 k_R^2 \kappa^2 k_z^2 + \kappa^2 k_z^2 k^4 \eta^3 (1-\epsilon)^3 + \frac{v_H^4}{4\Omega^2} k_z^4 \eta \kappa^2 (1-\epsilon) [k_R^2 (1-\epsilon^2) + k_z^2 (1-\epsilon)^2] \right] \\
 + & \left[\frac{v_H^2}{4\Omega^2} k_z^4 (1-\epsilon)^2 \kappa^2 \eta \frac{d\Omega^2}{d \ln R} + \eta (1-\epsilon) k_z^4 v_A^2 v_H^2 [k_z^2 (1-\epsilon)^2 + k_R^2 (1-\epsilon^2)] + k_z^4 v_A^2 \eta \frac{d\Omega}{d \ln R} (1-\epsilon)^2 \right. \\
 & \left. + \eta k_z^4 v_A^4 (1-\epsilon) [k_z^2 (1-\epsilon)^2 + k_R^2 (1-\epsilon^2)] + \eta \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} (1-\epsilon) v_A^2 v_H^2 k_z^4 [(1-\epsilon^2) k_R^2 + k_z^2 (1-\epsilon)^2] \right]
 \end{aligned}$$

