

ASTROFİZİKSEL DİNAMO PROBLEMİ

Özgür GÜLTEKİN¹

Özet

Evrendeki büyük ölçekli manyetik alanların, küçük ölçekli etkiler yardımıyla nasıl desteklendiği ve kaynağını nereden aldığı sorusu, hidromanyetik dinamo teorisinin temelini oluşturur. Bu bildiride, bazı temel bilgiler verildikten sonra, 1980 öncesi kinematik dinamo modelleri (Krause, Radler ve Steenbeck) ve 1980 sonrası geliştirilen doğrusal olmayan dinamo modelleriyle birlikte manyetik enerjinin evrimini inceleyen bazı sayısal çözümlerden bahsedilecektir.

Anahtar kelimeler: MHD, yıldız dinamoları.

1. Giriş

Evrendeki maddenin büyük bir bölümü manyetize plazma durumunda bulunmaktadır. Çok düşük frekanslarda plazma, hidrodinamik eşitliklerin tanımlandığı klasik bir akışkan olarak ele alınır. Plazma içindeki düşük frekans olayları aşağıdaki MHD denklemleri ile incelenebilir:

Madde yoğunluğuna ait süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

Kuvvet denklemi

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \rho + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (1.2)$$

Faraday Yasası

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Ampere Yasası

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Ohm yasası

$$\mathbf{J} = \sigma \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \quad (1.5)$$

Elektrik yüklerine ait süreklilik denklemi

¹ İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri, İstanbul, e-posta: ogultekin@scientist.com

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.6)$$

Eğer (1.5) Ohm yasası (1.3) Faraday denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{\sigma} \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.7)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem (1.4) Ampere yasası ile birlikte ele alınır

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.8)$$

şeklinde manyetik indüksiyon denklemini elde edilir.

Manyetik indüksiyon denkleminin sağ tarafındaki birinci terim *konvektif*, ikinci terim ise *sızma (diffusive)* terimi olarak adlandırılır. Konvektif terimin genliği, sızma teriminin genliğine oranlanırsa *Manyetik Reynolds Sayısı* (R_m) olarak tanımlanan boyutsuz bir parametreye ulaşılır. R_m sayısı, plazma akışkanı ile manyetik alanın ne kadar kuvvetli eşleştiğinin bir ölçüsüdür. Başka bir deyişle sızmaya uğrayan manyetik alan ile donmuş manyetik alan çizgilerinin oranıdır.

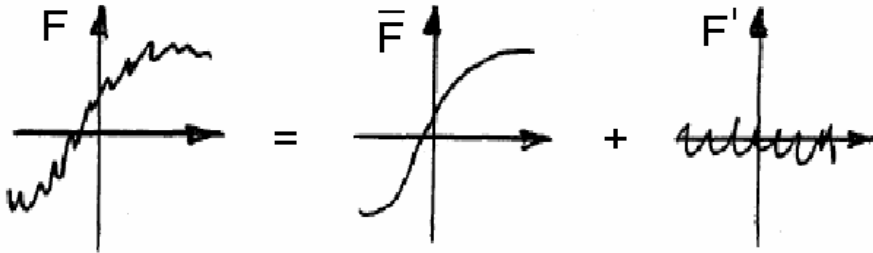
$R_m \ll 1$ ise manyetik alan sızmaya uğrar.

$R_m \gg 1$ ise manyetik indüksiyon denkleminde sadece konvektif terim göz önüne alınır. Böylece sızma zamanı civarındaki kısa zaman dilimleri için Alfven akı donması teoremi elde edilir. Bu durumda manyetik akı çizgilerinin, plazma akışkanının içinde donduğu söylenir. Yani manyetik alan plazmayı beraberinde sürükler.

Astrofiziksel koşullarda, genellikle $R_m \gg 1$ olduğu için Alfven akı donması teoremi önem kazanır.

2. Ortalama Alan Elektrodinamiği

Bir F büyük ölçekli dinamik değişkeni, bir ortalama \bar{F} ile onun yakınındaki küçük ölçekli F' salınan değerinin toplamı biçiminde yazılabilir.



Şekil 1: Orijinal alan = Ortalama alan + Küçük değişimler

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}' \quad (2.1)$$

Böylece Ohm yasası

$$\bar{\mathbf{j}} + \mathbf{j}' = \sigma \left[\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}' + \frac{1}{c} (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \times (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') \right] \quad (2.2)$$

şeklini alır. (2.4) Reynolds kurallarına göre bu denklemin ortalaması alınır

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma \left(\bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}$, çalkantıdan kaynaklanan yeni bir kaynak terimidir. Dinamo etkisi bu $\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$ elektromotor kuvvetinden kaynaklanmaktadır.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F} + \mathbf{G}} &= \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{G}} \\ \overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}} &\leftrightarrow \overline{\mathbf{F}'} = 0 \\ \overline{\mathbf{FG}} = \overline{\mathbf{FG}} &\leftrightarrow \overline{\mathbf{FG}} = \overline{\mathbf{FG}}, \overline{\mathbf{FG}'} = 0 \\ \overline{\partial \mathbf{F} / \partial x} &= \partial \overline{\mathbf{F}} / \partial x, \overline{\partial \mathbf{F} / \partial t} = \partial \overline{\mathbf{F}} / \partial t \quad \overline{\mathbf{FG}} = \overline{\mathbf{FG}} + \overline{\mathbf{F}'\mathbf{G}'} \end{aligned} \quad (2.4) \text{ Reynolds Kuralları}$$

$R_m \gg 1$ ve Alfven akı donması teoremi göz önüne alınır, hız alanı ile küçük ölçekli manyetik alanın çalkantı bileşenleri arasında korelasyon olduğu anlaşılır.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ (emk)'nin yapısı

Emk'nın i bileşeni $\varepsilon_i = a_{ij} \overline{B}_j + b_{ijk} \partial B_j / \partial x_k$ ayrıca v' yönbağımsız çalkantı, a_{ij}, b_{ijk} yönbağımsız tensörler ve $a_{ij} = \alpha \delta_{ij}, b_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk}$ olmak üzere $\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \overline{\mathbf{B}}$ şeklindedir. Burada α kinetik sarmallığı göstermektedir.

Böylece Ohm yasası

$$\overline{\mathbf{j}} = \frac{\sigma}{1 + \mu \sigma \beta} (\overline{\mathbf{E}} + \alpha \overline{\mathbf{B}}) \text{ biçimini alır. [1]}$$

3. Doğrusal Olmayan Dinamo

$$H = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle V \quad ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan manyetik sarmallığın korunması manyetik topolojinin korunduğu anlamına gelir. [2] Burada \mathbf{A} vektör potansiyelidir. Manyetik topolojinin korunması, çok küçük zaman ölçeklerinde birim hacimdeki manyetik enerjinin korunduğunu ifade eder.

Toplam manyetik sarmallığın zamana göre değişimi indüksiyon denklemi ve vektör potansiyeli cinsinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$d \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle / dt = -2\eta \mu_0 \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle \quad (3.2)$$

İndüksiyon denklemindeki sızma terimi önemsenmeseydi 3.2 denkleminin sağ tarafı sıfır olacaktı yani sızma teriminin önemsenmediği ortamda, manyetik alanın devinimi sırasında manyetik sarmallık korunacaktır.

$$\partial \overline{\mathbf{B}} / \partial t = \nabla \times (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} - \eta \mu_0 \overline{\mathbf{J}}) \quad (3.3)$$

$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \eta_t \mu_0 \overline{\mathbf{J}}$ olmak üzere 3.3 denkleminde $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ortalama elektromotor kuvveti ifade etmektedir. (3.3) ortalama indüksiyon denkleminde faydalanarak ortalama alanın sarmallığı aşağıdaki gibi bulunur :

$$d \langle \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle / dt = 2 \langle \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle - 2\eta \mu_0 \langle \overline{\mathbf{J}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle \quad (3.4)$$

$\mathbf{b} = \mathbf{B} - \overline{\mathbf{B}}$ ve $\mathbf{a} = \mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle - \langle \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle \quad (3.5)$$

$$\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle - \langle \overline{\mathbf{J}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle \quad (3.6)$$

ifadelerinden yola çıkarak küçük ölçekli sarmallığın dinamiğini anlatan

$$d \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle / dt = -2 \langle \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle - 2\eta\mu_0 \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir.[3][4]

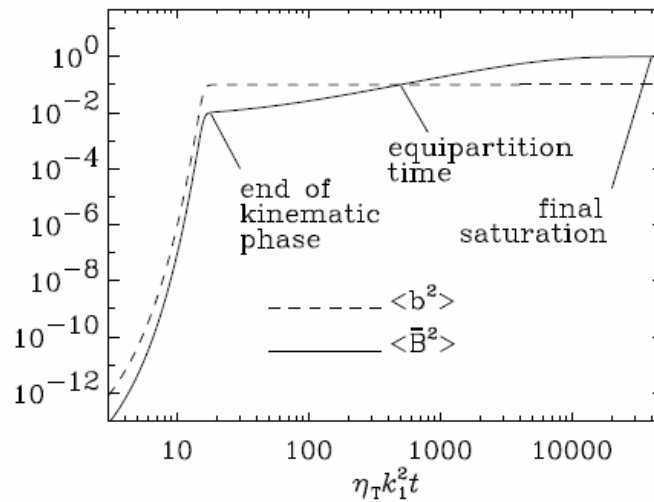
$$\alpha = -\frac{1}{3} \tau (\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \rangle) = -\frac{1}{3} \tau (\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} \rangle - p_0^{-1} \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle) \quad (3.8)$$

(3.8) denklemini Pouquet ve arkadaşları 1976 yılında elde etmiştir. [5] Çalkantılı alandaki dalga sayısına ilişkin $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle \approx \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle / k_f^2$ ifadesi ile (3.7) denklemini ele alır ve (3.8) ile birlikte düşünersek (3.9) denklemini elde ederiz. [6]

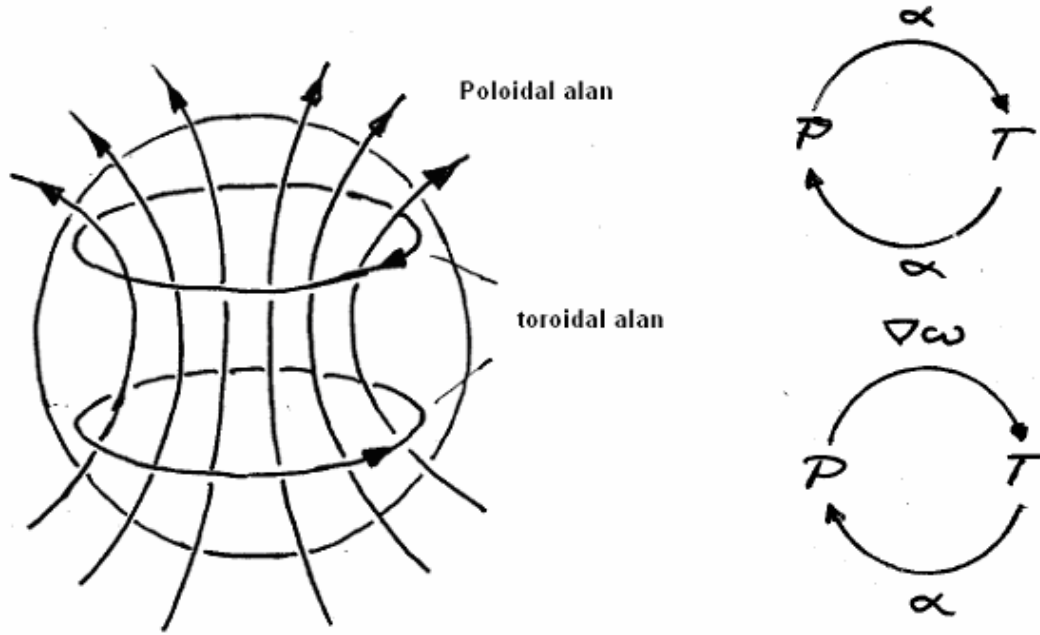
$\alpha_0 = -\frac{1}{3} \tau \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} \rangle$ eşitliği α nın kinematik değerini, $\eta_t = \frac{1}{3} \tau \langle \mathbf{u}^2 \rangle$ eşitliği çalkantılı yayılımı ve $B_{eq}^2 = \mu_0 \rho_0 \langle \mathbf{u}^2 \rangle$ eşitliği ise eşbölünüm manyetik enerjisini ifade etmek üzere

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\eta_t k_f^2 \left(\frac{\alpha \langle \overline{\mathbf{B}}^2 \rangle - \eta_t \mu_0 \langle \overline{\mathbf{J}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \rangle}{B_{eq}^2} + \frac{\alpha - \alpha_0}{R_m} \right) \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ile birlikte (3.3) ifadesi düşünüldüğünde elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklem dizgesi oldukça önemlidir. Bu denklem dizgesinin sayısal olarak yapılmış bir çözümlenmesiyle, eşbölünüm enerjisine yaklaşıldığında doğrusal olmayan etkilerin sarmal çalkantıyı ve çalkantı yayılma etkilerini baskıladığı anlaşılmaktadır. Böylece dinamo doyuma doğru ilerlemektedir.



Şekil 2: α^2 dinamosu için (3.3) ve (3.9) denklemlerinden oluşan doğrusal olmayan dizgenin sayısal çözümü ile ulaşılan zaman evrimi. Kinematik modellerdeki üstel artış burada da görülmesine rağmen eşbölünüm enerjisine ulaşıldığında çözümlenme doğrusal modellerden oldukça farklıdır.



Şekil 3: Poloidal ve toroidal alanlar. α^2 ve $\alpha\omega$ dinamları.

4. Sonuç

Kinematik dinamo modellerinde manyetik alanları besleyecek hız alanları *önsel* (a priori) varsayılır. Yani, güçlenen manyetik alanların başlangıçta varsayılan hız alanını nasıl yeniden biçimlendireceği konusunda bilgi verilmez. Oysa manyetik alan, kendisinden beslediği hız alanlarıyla eşbölünüm şiddetine ulaştığında, Lorentz kuvveti, geri tepkime ile kaynak hız alanlarını değiştirir. Bu etkinin anlaşılmasıyla birlikte doğrusal dinamo modelleri, yerini doğrusal olmayan modellere bıraktı.

Buna ek olarak 1990'lı yıllarda yıldız dinamolarının kaotik davranışları üzerine yapılan çalışmalar yoğunlaşmıştır. (Tobias v.d.,1995) Artık Kaos'un ortaya çıktığı her alanda, ekonomi, nüfus değişimleri, meteoroloji, kimya gibi dallarda dinamik dizgeler kuramı ile pratik olarak çok faydalı modeller yapıldığına tanık oluyoruz. Kaotik davranışları gözlenen karmaşık dizgeler, dinamik dizgeler kuramıyla modellendiğinde çözümü çok zor olan sorular için işe yarar bilgiler sağlanmaktadır. Elbette böyle çalışmalar yıldız dinamolarının altında yatan fizikle ilgilenmez. Bu şekilde gerçekliği, ayrıntılarından soyutlanmış matematiksel bir model olarak incelemek olanaklıdır. Ancak kaotik davranış gösteren dizgelerin doğasını anlamak için daha farklı bir yol bugün için bilinmemektedir.

Ayrıca yapılan simülasyonların, dünyadaki laboratuvarımız olduğunu düşünebiliriz. Dolayısıyla bu çalışmalarda deney, gözlem ve teori arasında, olması gerektiği gibi sıkı ilişkiler kurulmuştur.

5. Kaynaklar

- [1] K.H.Radler, Introduction to General and Mean Field Dynamo Theory, March (2003)
- [2] L. Woltjer, Proc. Nat. Acad, 44, 80 (1958)
- [3] N.I. Kleorin ve A.A. Ruzmaikin, Magnetohydrodynamics 18 (1982)
- [4] E.G. Blackman ve A.Brandenburg, ApJ 579 (2002)
- [5] A. Pouquet, U. Frisch ve J.Leorat, JFM 77 (1976)
- [6] E.G. Blackman, A. Brandenburg, Dynamic Nonlinearity in Large-Scale Dynamos with Shear, ApJ 579 – astro-ph 0204497 (2002)
- [7] A. Brandenburg ve K. Subramanian, Astrophysical Magnetic Fields and Nonlinear Dynamo Theory

- [8] M. Steenbeck, F. Krause, K.H. Radler, A Calculation of the Mean Electromotive Force in an Electrically Conducting Fluid in Turbulent Motion Under the Influence of Coriolis Forces. Z. Naturforsch 21 (1966)
- [9] E. Işık, Doğrusal Olmayan Astrofiziksel Dinamo Problemi: Analitik ve Sayısal Yaklaşımlar, Astronomide Matematik Yöntemler, İstanbul Kültür Üniversitesi Yayınları: 35 (2003)
- [10] R.G. Türeci, Plazma Fiziğinde Manyetik Ayna Problemi ve Nötr Parçacık Transportu, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara (2001)
- [11] S.R.Seshadri, Plazma Fiziği, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Türkçesi: E.R.Pekünlü, İzmir (1993)