BERTOTTİ-ROBİNSON UZAY-ZAMANININ ENERJİ-MOMENTUM DAĞILIMLARI

Sezgin Aygün[1,2], Melis Aygün[1,2], İsmail Tarhan[1,2], Hüsnü Baysal[2,3]

[1]Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen- Edeb. Fakültesi, Fizik Bölümü, 17100 / Çanakkale

[2]Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Astrofizik Araştırma Merkezi, 17020 / Çanakkale

3Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi,Eğitim Fak., Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitim, Çanakkale

Özet

Bu çalışmada Genel Relativite teorisi kapsamında Bergmann-Thomson, Einstein, Landau-Lifshitz, Papapetrou ve Møller enerji-momentum dağılımları kullanılarak Bertotti-Robinson metriği için enerji-momentum problemi araştırılmıştır. Bergmann-Thomson ve Møller enerji-momentum dağılımlarının birbiri ile aynı sonuçları verirken, Einstein, Landau-Lifshitz ve Papapetrou enerji dağılımlarının farklı sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Enerji-momentum Problemi, Bertotti-Robinson Metriği, Genel Relativite Teorisi

1. Giriş

Enerji-momentum lokalizasyonu yani yerelleştirilmesi problemi, genel relativite çerçevesinde halen üzerinde sıkça durulan ve de tartışılan temel problemlerin arasındadır. İlk olarak enerji-momentum tanımı Einstein tarafından yapılmıştır[1]. Daha sonra Tolman [2], Papapetrou [3], Bergmann-Thomson [4], Møller [5], Weinberg [6], Landau-Lifshitz [7] ve Qadir-Sharif [8] gibi birçok araştırmacı bu problemi çözebilmek için çeşitli enerji-momentum tanımlarını ortaya atmışlardır. Møller enerji-momentum tanımı hariç diğer enerji-momentum tanımlarının anlamlı sonuçlar verebilmesi için kartezyen koordinat sisteminde hesaplanmaları gerekmektedir [9].

Diğer taraftan Einstein-Maxwell denklemlerinin uniform elektromanyetik alanlı non-singuler çözümü olan Bertotti-Robinson uzay-zamanı aşağıda verilen metrikle ifade edilmektedir[10]:

$$ds^2 = \frac{q^2}{r^2}\left(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{1}$$

Burada $F_{ab}F^{ab} = q^2 = sbt$ şeklindedir. Küresel koordinatlardaki Bertotti-Robinson metriğinde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arccos\left(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ ve $\phi = \arctan(y/x)$ koordinat dönüşümü yapıldığında kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$ds^2 = \frac{q^2}{r^2}\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{2}$$

2. Bergmann-Thomson, Einstein, Landau-Lifshitz, Møller ve Papapetrou Enerji-Momentum Tanımları ve Bertotti-Robinson Uzay-zamanının Enerj-Momentum Dağılımları

Bergmann-Thomson enerji-momentumu ve Bergmann-Thomson süper-potansiyelleri sırasıyla

$${}_{GR}B^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi}\Pi^{\mu\nu\alpha}_{\ ,\alpha}$$

$$\Pi^{\mu\nu\beta} = g^{\mu\alpha} V^{\nu\beta}_{\alpha} \qquad \text{ve}$$

$$V^{\nu\beta}_{\alpha} = -V^{\beta\nu}_{\alpha} = \frac{g_{\alpha\xi}}{\sqrt{-g}}\left[-g\left(g^{\nu\xi}g^{\beta\rho} - g^{\beta\xi}g^{\nu\rho}\right)\right]_{,\rho} \tag{3}$$

şeklindedir[4]. (1) metriği ve (3) denklemlerinin birlikte kullanılmasıyla Bergmann-Thomson süper-potansiyeleri

$$\Pi_0{}^{01} = \frac{4x}{r^2}, \qquad \Pi_0{}^{02} = \frac{4y}{r^2}, \qquad \Pi_0{}^{03} = \frac{4z}{r^2} \tag{4}$$

olarak elde edilir. (4) eşitliği (3) denkleminde kullanıldığında ise Bertotti-Robinson metriğinin Bergmann-Thomson enerji ve momentum dağılımları elde edilir ve aşağıdaki şekildedir.

$$B_0{}^0 = -\frac{q^2}{4\pi r^4}, \; B_1{}^0 = 0, \; B_2{}^0 = 0, \quad B_3{}^0 = 0. \tag{5}$$

Genel relativite teorisi kapsamında Einstein enerji-momentumu ve süper-potansiyeli sırasıyla

$${}_{GR}\mathrm{E}_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi}\mathrm{H}_{\mu,\alpha}^{\nu\alpha} \qquad \text{ve}$$

$$\mathrm{H}_\mu^{\nu\alpha} = -\mathrm{H}_\mu^{\alpha\nu} = \frac{g_{\mu\beta}}{\sqrt{-g}}\left[-g\left(g^{\nu\beta}g^{\alpha\xi} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\xi}\right)\right]_{,\xi} \tag{6}$$

şeklinde tanımlanır[1]. (1) metriği ve (6) denkleminin birlikte kullanılmasıyla

$$H_0{}^{01} = \frac{4q^2x}{r^4}, \quad H_0{}^{02} = \frac{4q^2y}{r^4}, \quad H_0{}^{03} = \frac{4q^2z}{r^4} \tag{7}$$

olarak elde edilir. (7) ve (6) denklemerinden ise Bertotti-Robinson metriğinin Einstein enerji ve momentum dağılımları elde edilir ve aşağıdaki şekildedir.

$$E_0{}^0 = \frac{q^2}{4\pi r^4}, \qquad E_1{}^0 = 0, \qquad E_2{}^0 = 0, \qquad E_3{}^0 = 0 \tag{8}$$

Landau-Lifshitz enerji-momentumu ve süper potansiyeli

$${}_{GR}\mathrm{L}^{\mu\alpha} = \frac{1}{16\pi}\mathrm{S}_{,\nu\beta}^{\mu\nu\alpha\beta} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{S}^{\mu\nu\alpha\beta} = -g\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right) \tag{9}$$

olarak tanımlanmaktadır[7]. (1) metriği ve (9) denkleminin birlikte kullanılmasıyla

$$S^{0101} = S^{0202} = S^{0303} = -\frac{q^4}{r^4},$$

olarak elde edilir. (10) ve (9) denklemlerinden ise Bertotti-Robinson metriğinin Landau-Lifshitz enerji ve momentum dağılımları elde edilir ve aşağıdaki şekildedir.

$$L_0^{\ 0} = \frac{3q^6}{4\pi r^8}, \quad L_1^{\ 0} = 0, \quad L_2^{\ 0} = 0, \quad L_3^{\ 0} = 0 \tag{11}$$

Genel relativite çerçevesinde Møller enerji-momentumu ve süper-potansiyeli ifadesi

$$\mathrm{M}_\mu^\nu = \frac{1}{8\pi}\chi_{\mu,\alpha}^{\nu\alpha} \qquad \text{ve}$$

$$\chi_\mu^{\nu\alpha} = -\chi_\mu^{\alpha\nu} = \sqrt{-g}\left(g_{\mu\beta,\gamma} - g_{\mu\gamma,\beta}\right)g^{\nu\gamma}g^{\alpha\beta} \tag{12}$$

şeklindedir. (1) metriği ve (12) denkleminin birlikte kullanılmasıyla Moller süper-potansiyeleri

$$\chi_0^{\ 01} = \frac{2q^2x}{r^4}, \quad \chi_0^{\ 02} = \frac{2q^2y}{r^4}, \quad \chi_0^{\ 03} = \frac{2q^2z}{r^4} \tag{13}$$

olarak elde edilir. (13) ve (12) denklemlerinden ise Bertotti-Robinson metriğinin Moller enerji ve momentum dağılımları elde edilir ve aşağıdaki şekildedir.

$$M_0^{\ 0} = -\frac{q^2}{4\pi r^4}, \quad M_1^{\ 0} = 0, \quad M_2^{\ 0} = 0, \quad M_3^{\ 0} = 0 \tag{14}$$

Genel relativite teorisi çerçevesinde Papapetrou enerji momentumu ve süper-potansiyeli ifadesi

$$\Sigma^{\mu\nu} = \mathrm{N}^{\mu\nu\alpha\beta}_{\ ,\alpha,\beta} \qquad \text{ve}$$

$$\mathrm{N}^{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}\right) \tag{15}$$

şeklindedir. (1) metriği ve (15) denkleminin birlikte kullanılmasıyla Papapetrou süper-potansiyeleri

$$N^{0011} = N^{0022} = N^{0033} = -\frac{2q^2}{r^2}, \tag{16}$$

olarak elde edilir. (16) ve (15) denklemlerinden ise Bertotti-Robinson metriğinin Papapetrou enerji ve momentum dağılımları elde edilir ve aşağıdaki şekildedir.

$$\Sigma_0{}^0 = \frac{q^4}{4\pi r^6}, \qquad \Sigma_1{}^0 = 0, \quad \Sigma_2{}^0 = 0, \qquad \Sigma_3{}^0 = 0 \tag{17}$$

3. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, Bertotti-Robitson uzay-zamanı dikkate alınmış ve bu uzay-zamanda enerji-momentum dağılımlarının nasıl olduğu araştırılmıştır. Küresel koordinatlarda ifade edilen Bertotti-Robinson metriği önce koordinat transformasyonuyla kartezyen koordinatlarda yazılmıştır. Daha sonra Bergmann-Thomson, Einstein, Landau-Lifshitz, Moller, Papapetrou enerji ve momentum dağılımları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlardan bu uzay-zaman için Bergmann-Thomson ve Moller enerji ve momentum dağılımlarının aynı olduğu, diğer tanımlardan elde edilen dağılımların ise farklı değerlere sahip olduğu görülmüştür. Eğer tüm enerji-momentum tanımları tutarlı olsaydı aynı uzay-zaman için yapılan hesaplamalar da aynı olurdu. Fakat görüldüğü üzere bazı tanımlardan elde edilen değerler aynı metrik için farklı sonuçlar vermiştir. Bu çalışma bu sebeple genel relativitede enerji ve momentum hesaplanmasının hala temel problemlerden biri olduğunu ortaya koymaktadır.

4. Kaynaklar

[1] Einstein, A.(1915) *Sitzungsber. Preus. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 778 , *Addendum-ibid*.,799

[2] Tolman, R.C.(1934) *Relativity, Thermodinamics and Cosmology (Oxford Univ. Pres.London)*, 227

[3] Papapetrou, A.(1948), *Proc. R. Irish. Acad.* A52, 11

[4] Bergmann, P.G., Thomson, R. (1953) *Phys. Rev. 89*, 400

[5] Moller, C.(1958), *Ann. Phys. (NY)* 4, 347

[6] Weinberg, S.(1972), *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of General Theory of Relativity (John Wiley and Sons, Inc., New York)*

[7] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.(2002), *The Classical theory of fields (Pergamon Press, 4th Edition, Oxford)* (Reprinted in 2002)

[8] Qadir, A., Sharif, M.(1992), *Phys. Lett.* A167, 331

[9] Radinschi, I.(2000), *Mod. Phys. Lett.* A15, 2171

[10] Bertotti B, (1959), *Phys. Rev.* 116, 1331; Robinson I, (1954) Bull. *Acad. Polon. Sci.* 7, 531