

SEYRELTİK PLAZMADA GYROVİSKOZ KARARSIZLIĞIN ÖZELLİKLERİ

Ebru DEVLEN¹ ve E. Rennan PEKÜNLÜ²

¹ Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, İzmir

² Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, İzmir

Özet Bu çalışmada zayıf manyetik alan içeren ve diferansiyel dönen, sıcak, seyreltik (dilute) plazmanın kararlılığını inceledik. Bu tür plazma dev karadeliklerin etrafındaki düşük yoğunluklu toplanma akışlarında ve gökadalaraarası ortamda bulunabilir. MHD bağlamında paralel viskozite ve gyroviskozitenin manyetik dönme kararsızlığı üzerindeki etkilerini inceledik. Gyroviskoz kuvvetin güçlü bir kararsızlığa neden olduğunu gösterdik.

1 Giriş

Balbus ve Hawley (1991) zayıf manyetik alan içeren ve açısız hızın dışarıya doğru azaldığı bir toplanma diskinin doğrusal bağlamda kararsız olduğunu gösterdiler. Bu kararsızlık manyetik dönme kararsızlığı (magnetorotational instability: MRI) olarak bilinir.

Islam ve Balbus (2005) paralel viskoz stresin kararsızlığa neden olduğunu ve kararsızlığın büyüme oranının ideal MRI dan daha büyük olduğunu gösterdiler.

Ramos (2003) çarpışmasız manyetize plazmada manyetik alana koşut ısı akılarının dinamik evriminin çözümlemesini yaptı. Çalışmada, çarpışmasız MHD yaklaşımının dalga-parçacık etkileşimi gibisinden süreçlerin taşıdığı kinetik bilgiyi içermediği savunuldu. Tutarlı bir sonuca ulaşabilmek için stres tensöründe gyroviskoziteyi dikkate aldı. Çarpışmasız plazmanın akışkanlar bağlamındaki ilk betimlemesini Chew, Goldberger ve Low (1956) vermiştir. Bu yazarların çalışması sıfır veya düşük mertebeden Larmor yarıçapı sınırında yapılmıştı. Diyamanyetizm ve çok akışkanlı etkilerin ortaya çıkarılabilmesi için Larmor yarıçapında seriye açılımın üst mertebeden terimlerini içermesi gerekiyor. Manyetize olmuş çarpışmasız plazma çözümlemesi önündeki bu eksiklikleri gidermek amacıyla Ramos (2005) yüksek mertebeden FLR etkilerini içeren terimleri akışkan hız momentleri eşitlikleri dizgesine kattı. Bu eşitlikler dizgesinin, geometrik yapısı ne olursa olsun bir manyetik alandaki gyroviskoz stresleri, basınç yönbağımlılığını ve yönbağımlı ısı akısını açıklayabileceğini savundu.

Ferraro (2007) iki-akışkan MHD denklemlerinde sonlu Larmor yarıçapı etkisinin getirdiği düzeltmeleri dikkate almıştır. $\mathbf{B}_0 = B\hat{\mathbf{z}}$ biçiminde manyetik alan içeren plazmada sadece açısız hız vektörü ile manyetik alan vektörünün aynı yönlü olduğu durumda kararsızlığın ortaya çıktığını buldu.

Bu çalışmada zayıf manyetik alan içeren ve diferansiyel dönen seyreltik plazmanın paralel viskozite ve gyroviskozite etkileri altındaki kararsızlık özellikleri incelenmiştir.

2 Seyreltik Plazmanın Özellikleri

İyon Larmor yarıçapının iyon ortalama özgür yolundan $r_{Li} \ll \lambda_i$ ve diskin herhangi bir ölçek uzunluğundan çok küçük olduğudur. Bu parametre uzayı aynı zamanda iyon cyclotron frekansının iyon-iyon ortalama çarpışma zamanından çok büyük olduğu $\epsilon \equiv \omega_{ci}\tau_i \gg 1$ uzaydır.

Bu koşullar altında, plazma dinamiğini belirleyen MHD eşitlikleri, manyetik alan kuvvet çizgileri boyunca özgürce devinen parçacıkların neden olduğu yönbağımlı taşınım süreçlerini dikkate almalıdır (Bragiskii 1965). İyonların paralel viskoziteye katkısı elektronlarınkinden $(m_i/m_e)^{1/2}$ çarpanı denli büyüktür. Bu yüzden sadece iyonların katkısı alınır. Seyreltik plazma için MHD eşitlikleri şöyle verilir:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \rho g(R) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

Stres tensörü $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{\parallel} + \mathbf{\Pi}^{\perp} + \mathbf{\Pi}^{gv}$, paralel (\parallel), dik (\perp) ve gyroviskoz (gv) bileşenlerinin toplamı ile verilir. Ancak dik viskozitenin katkısı çok küçük olduğundan boşlanır.

$$\mathbf{\Pi}^v = 0.96 \frac{P_i}{2\nu_i} (\mathbf{I} - 3\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}) (\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \quad (4)$$

$$\mathbf{\Pi}^{gv} = \frac{P_i}{4\omega_{ci}} \left[\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} + 3\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}) + \left[\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} + 3\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}) \right]^T \right] \quad (5)$$

Burada $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$, $\omega_{ci} = eB/m_i c$ sırasıyla manyetik alan boyunca olan birim vektör ile cyclotron frekansıdır, ν_i iyon çarpışma frekansı ve $\mathbf{W} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - 2/3 \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{v})$ rate of strain tensörüdür.

3 Doğrusallaştırılmış Eşitlikler

Çalışmamızı silindirik konsayı düzeneğinde (R, ϕ, z) yapacağız. Eksen bakışık olarak ortaya çıkan tedirginliklerin uzay-zaman değişimlerinin de, $\exp(ik_R + ik_z + \omega t)$ biçiminde olduğu varsayılacak. Plazmadaki zayıf manyetik alanın sarmal biçiminde olduğu, bileşenlerinin ve manyetik alanın ϕ eksenine yaptığı açısında (bundan sonra bu açıyı pitch angle: *tinis açısı* olarak adlandıracağız. Ancak bu

açının parçacık yörünge kuramındaki, parçacığın anlık hız vektörüyle manyetik alan arasındaki açıyla karıştırılmaması gerekiyor.) sırasıyla , $B_z = B_0 \sin \theta$, $B_\phi = B_0 \cos \theta$ ve $\theta = \tan^{-1}(B_z/B_\phi)$ oldukları varsayılacaktır. B_0 , manyetik alanın başlangıçtaki genliğidir. Sonlu bir değere sahip B_R nin zamanla B_ϕ bileşeni üreteceği (BH91) ve çözümlenmeyi karmaşık bir duruma sokacağı için $B_R = 0$ varsayımı yaptık. Denge durumunda plazmanın Kepler hız alanına sahip olduğu, diğer bir deyişle diferansiyel döndüğü $v_\phi = R\Omega(R)$, ve plazma basıncının yönbağımsız olduğu varsayılmıştır.

Doğrusallaştırılmış kütle korunumu eşitliği

$$k_R \delta v_R + k_z \delta v_z = 0 \quad (6)$$

ile verilir. Doğrusallaştırmış momentum korunumu eşitliğinin doğrusal, azimutal ve eksensel bileşenleri de sırasıyla şöyle verilir:

$$\begin{aligned} & \omega \delta v_R - 2\Omega \delta v_\phi + ik_r \frac{\delta P}{\rho} \\ & + \frac{1}{4\pi\rho} ik_R (B_\phi \delta B_\phi + B_z \delta B_z) - \frac{1}{4\pi\rho} ik_z B_z \delta B_R \\ -V_{par} & \left[\frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \frac{k_R}{k_z} \sin 2\theta \delta v_R + \frac{k_R}{k_z} \sin 2\theta \delta v_\phi + 2 \frac{k_R}{k_z} \sin^2 \theta \delta v_z \right] \\ -V_{gyro} & \left[2 \sin \theta \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \left(\frac{k_R^2}{k_z^2} - 1 \right) \delta v_R + (2 \cos \theta \frac{k_R^2}{k_z^2} + E) \delta v_z \right. \\ & \left. - (2 \frac{k_R^2}{k_z^2} \sin \theta + A) \delta v_\phi \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega \delta v_\phi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \delta v_R - \frac{1}{4\pi\rho} ik_z (B_z \delta B_\phi) \\ +V_{par} & 2D \left[\frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \cos \theta \delta v_R + \cos \theta \delta v_\phi + \sin \theta \delta v_z \right] \\ +V_{gyro} & \left[-2D \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \delta v_z + \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} B \delta v_\phi \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{d\Omega}{d \ln R} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} B - A + 2 \sin \theta \frac{k_R^2}{k_z^2} \right] \delta v_R \right] = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega \delta v_z + ik_z \frac{\delta P}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} ik_z B_\phi \delta B_\phi \\ +V_{par} & \left[F \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \delta v_R + F \delta v_\phi + C \delta v_z \right] \\ +V_{gyro} & \left[\left(2 \frac{k_R^2}{k_z^2} \cos \theta + E + 4D \left(\frac{d\Omega}{d \ln R} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} \right) \delta v_R \right. \\ & \left. + \left(4 \frac{k_R}{k_z} \sin \theta + 4D \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} \right) \delta v_\phi + \frac{d\Omega}{d \ln R} \frac{1}{\omega} G \delta v_z \right] = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Doğrusallaştırılmış manyetik indüksiyon eşitliğinin doğrusal azimutal ve eksensel bileşenleri de sırasıyla şöyle verilir:

$$\omega \delta B_R - ik_z B_z \delta v_R = 0 \quad (10)$$

$$\omega \delta B_\phi - ik_z B_z \delta v_\phi - \frac{d\Omega}{d \ln R} \delta B_R = 0 \quad (11)$$

$$\omega \delta B_z - ik_z B_z \delta v_z = 0 \quad (12)$$

Yukarıdaki bağıntılarda $V_{par} = 0.96 k_z^2 P_i / 2 \nu_i \rho$ paralel viskoziten kaynaklanan dissipation zaman ölçeğinin tersi, $V_{gyro} = k_z^2 P_i / 4 \omega_{ci} \rho$ gyroviskoz stresin zaman ölçeğinin tersidir. κ^2 epicyclic frekanstır. Tıms açısına θ bağlı olan diğer sabitler şöyledir: $A = \sin \theta (1 - 3 \cos 2\theta)$, $B = \sin \theta (1 + 9 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$, $C = 2 \sin^2 \theta (-1 + 3 \sin^2 \theta)$, $D = 3 \sin^2 \theta \cos \theta$, $E = 2 \cos \theta (1 + 3 \sin^2 \theta)$, $F = 2 \sin \theta D - \sin 2\theta$, $G = \sin \theta (1 + 3 \cos 2\theta)$ ve $H = 3 \sin \theta \cos^2 \theta$.

(6)–(12) eşitliklerinden türetilen boyutsuz dağılma bağıntısı (dimensionless dispersion relation: DDR) (13) eşitliğiyle verilmiştir:

$$\omega^4 + a_3 \omega^3 + a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0 \quad (13)$$

(13) eşitliğindeki katsayılar şunlardır:

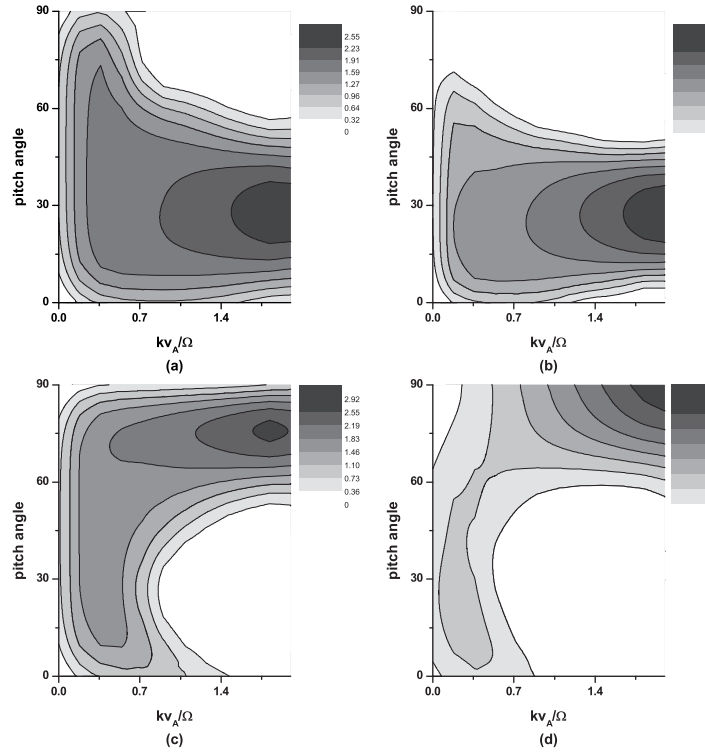
$$a_3 = 6 V_{par} s^2 \frac{k_\perp^2}{k^2} \quad (14)$$

$$a_2 = 2 k_z^2 v_A^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \kappa^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \tilde{V}_{gyro}^2 \Omega^2 (2s y^2 - A)^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' (G + H) + 4 \frac{k_z^2}{k^2} \tilde{V}_{gyro} (2s y^2 - A) \quad (15)$$

$$a_1 = 6 V_{par} s^2 k_z^2 v_A^2 \frac{k_\perp^2}{k^2} + V_{par} \tilde{V}_{gyro} 3s^2 G \Omega' \frac{k_\perp^2}{k^2} + \frac{k_z^2}{k^2} V_{par} \Omega' 2cD + \frac{k_z^2}{k^2} \tilde{V}_{gyro} 6y \Omega D \Omega' + (\tilde{V}_{gyro})^2 3y \Omega D (2s y^2 - A) \Omega' \frac{k_z^2}{k^2} \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{k_z^2}{k^2} y^2 \tilde{V}_{gyro}^2 2D^2 (\Omega')^2 + \left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' (G/2 + H) \right] \times \left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' G/2 + \frac{k_z^2}{k^2} \Omega' \right] \quad (17)$$

burada $y = k_R/k_z$, $\Omega' = d\Omega^2/d \ln R$, $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$, $k_\perp^2 = k_R^2 + k_z^2 \cos^2 \theta$ and $\tilde{V}_{gyro} = k_z^2 P_i / 4 \Omega \omega_{ci} \rho$ dir.



Şekil 1. $\Omega \uparrow \mathbf{B}_z$ (Şekil 1a ve 1b) ve $\Omega \downarrow \mathbf{B}_z$ (Şekil 1c ve 1d) için gyrovizkoz kararsızlığın büyüme oranları. Şekil 1a ve 1c $k_R = 0$ için, Şekil 1b ve 1d ise $k_R/k_z = 1$ için çizilmiştir. $\tilde{V}_{gyro}^n = 1$ durumunda 60° den küçük açılarda ve $\tilde{V}_{gyro}^n = -1$ durumunda 60° den büyük açılarda kararsızlık geniş bir dalgasayı aralığında ortaya çıkar.

4 Kararsızlık Kriteri ve Sayısal Çözümler

(13) eşitliği yukarıda özellikleri verilen plazmada ortaya çıkan dört tane düşük frekanslı biçemi (mod) tanımlar. Kararsızlık için gerek ve yeter koşul Routh-Hurwitz teoremine göre şöyle verilir:

$$a_0 = \frac{k_z^2}{k^2} y^2 \tilde{V}_{gyro}^2 2D^2(\Omega')^2 + \left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' (G/2 + H) \right] \\ \times \left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' G/2 + \frac{k_z^2}{k^2} \Omega' \right] < 0 \quad (18)$$

Gyroviskozitenin yokluğunda bu kriter ideal MRI kriterine $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 < -\Omega'$ indirgenir. Basitlik için $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ alalım. Bu durumda tıms açısı 90° dir ve $D = 0$, $G = -2$, $H = 0$ olur. Böylece kararsızlık kriteri basitleşir:

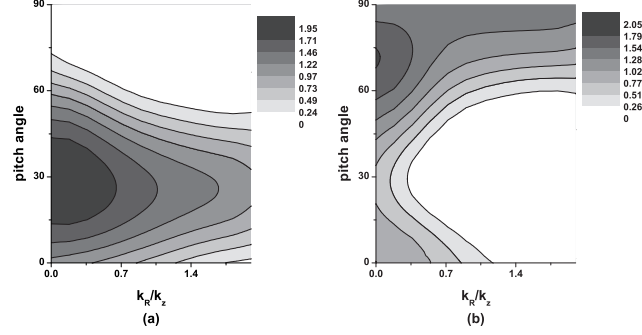
$$\left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' (G/2 + H) \right] \left[k_z^2 v_A^2 + \tilde{V}_{gyro} \Omega' G/2 + \frac{k_z^2}{k^2} \Omega' \right] < 0 \quad (19)$$

$\Omega' > 0$ için kararsızlık \tilde{V}_{gyro} işaretine bağlıdır. $\tilde{V}_{gyro} > 0$ (bu durumda $(\Omega \uparrow \uparrow \mathbf{B})$ olur) için birinci çarpan pozitif olur ve kararsızlık koşulu ikinci çarpanın sıfırdan küçük olmasına indirgenir. Bu durumda diferansiyel dönmeyle eşleşen gyroviskoz kuvvet manyetik gerilme kuvvetiyle aynı yönde etki ettiğinden kararsızlığı bastırır. $\tilde{V}_{gyro} < 0$ (bu durumda $(\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B})$ olur) için, gyroviskoz kuvvet manyetik gerilmeye ters yönlüdür ve kararsızlığı kuvvetlendirir. Farklı tıms açıları ve radyal dalga sayılarını dikkate alırsak (18) eşitliğini yorumlamak güçleşir. Bu durumda kararsızlığın davranışını görmek için boyutsuz dağılma bağıntısının sayısal çözümlerine bakılır. (13) eşitliğinin her tarafı Ω^4 ile bölünerek boyutsuz dağılma bağıntısı elde edilir.

Şekil 1 dalgasayısına karşı tıms açısına göre büyüme oranlarını göstermektedir. Şekil 1a $\Omega \uparrow \uparrow \mathbf{B}_z$ durumunda en hızlı büyüyen biçem (yani $k_R = 0$) için, Şekil 1b $k_R/k_z = 1$ için çizilmiştir. 15° ile 45° arasındaki tıms açılarında $k_R = 0$ ve $k_R/k_z = 1$ için tüm dalgasayılı biçem kararsız iken, $\theta > 60^\circ$ ve $k_R/k_z = 1$ için tüm dalgasayılı biçem kararlıdır. Maksimum büyüme oranları ideal MRI mkinden (0.75Ω) özellikle $\theta = 30^\circ$ için oldukça büyüktür.

$\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B}_z$ durumu Şekil 1c ve 1d de sırasıyla $k_R = 0$ ve $k_R/k_z = 1$ için gösterilmiştir. $k_R = 0$ durumunda $\theta > 45^\circ$ olduğu tıms açılarında kararsızlık vardır. $k_R/k_z = 1$ için $\theta > 60^\circ$ olan açılarda kararsızlık görülür. Maksimum büyüme oranları yine ideal MRI mkinden büyüktür.

En hızlı büyüyen biçem için normalize edilmiş dalgasayısı $k_z v_A / \Omega = (15/16)^{1/2}$ olarak verilir (Balbus & Hawley 1992). Şekil 2 de tıms açısı ve k_R/k_z için büyüme oranlarını çizdirdik. $\tilde{V}_{gyro}^n = 1$ için büyüme oranları Şekil 2a da, $\tilde{V}_{gyro}^n = -1$ için büyüme oranları Şekil 2b de verilmiştir. $\Omega \uparrow \uparrow \mathbf{B}_z$ durumunda, büyüme oranları küçük tıms açıları ve k_R için en büyük değerlere sahiptir (bkz. Şekil 2a). $\theta > 60^\circ$ açılarında kararsız biçem yoktur. $\Omega \uparrow \downarrow \mathbf{B}_z$ durumunda ise bu açılarda kararsızlık en büyük büyüme oranlarına sahiptir.



Şekil 2. En hızlı büyüyen biçimin normalize edilmiş dalgasayısı ($k_z v_A / \Omega = (15/16)^{1/2}$) için tıms açıları ve k_R/k_z değerlerine karşı çizilen büyüme oranları. $\tilde{V}_{gyro}^n = 1$ durumunda (Şekil. 2a) 60° den küçük tıms açıları ve $\tilde{V}_{gyro}^n = -1$ durumunda (Şekil. 2b) 60° den büyük tıms açılarında kararsızlık tüm dalgasayılarında ortaya çıkar.

5 Sonuç

Bu çalışmada zayıf manyetik alan içeren ve diferansiyel dönen seyreltik plazmanın paralel viskozite ve gyroviskozite etkileri altındaki kararsızlık özelliklerini inceledik. Seyreltik plazmada paralel viskozite gyroviskoziteden çok büyük olmasına karşın kararsızlık koşulu ve büyüme oranları üzerinde bir etkisinin olmadığını gösterdik. Gyroviskoz kuvvet güçlü bir kararsızlığa yol açar. Kararsızlığın büyüme oranları $0.5\Omega - 3\Omega$ arasındadır. $\Omega \uparrow \mathbf{B}_z$ durumu içinde Ferraro'nun (2007) tersine kararsızlık olduğunu gösterdik. Daha detaylı bilgi ve bu kararsızlığa ilişkin diğer şekiller için Devlen ve Pekünlü (2010) makalesine bakınız.

Kaynaklar

- Balbus, S. A., Hawley, J. F.: 1991, ApJ, 376, 214.
Balbus, S. A., Hawley, J. F. 1992, ApJ, 392, 662
Braginskii, S.I.: 1965, in *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 1, ed. M. A. Leontovich (New York: Consultants Bureau), 205.
Chew, G.L., Goldberger, M.L., and Low, F.E.: 1956, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 236, 112.
Devlen E., Pekünlü E. R.: 2010, MNRAS, 404, 830.
Ferraro, N.M.: 2007, ApJ, 662, 512.
Islam, T. & Balbus, S.: 2005, ApJ, 633, 328.
Ramos, J.J.: 2003, Physics of Plasmas, 10, 3601.
Ramos, J.J.: 2005, Physics of Plasmas, 12, 052102.